Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel

Dresden, 14. Oktober 2020

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 3

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Die Mengen A_1, A_2 und A_3 seien durch

$$A_i = \{1+2i,\ 2+2i,\ 3+2i,\ 4+2i,\ 5+2i\} \qquad (i = 1,2,3)$$

definiert.

(a) Geben Sie jeweils die Elemente der Mengen A_1, A_2 und A_3 (ohne Verwendung des Index i) an.
(b) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
(i) $A_1 \cup A_2$, *(ii)* $A_2 \setminus A_3$, *(iii)* $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$, *(iv)* $\{x \in A_1 \mid 2x \in A_3\}$.

Aufgabe 2: Gegeben sind die Mengen A, B und C.

Veranschaulichen Sie die folgenden Mengengleichheiten durch Mengendiagramme und beweisen sie diese anschließend.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
(c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
(d) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

Aufgabe 3: Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 7\},\quad B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \le x^2 < 9\right\},\quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| > 3\} \quad \text{und}$$
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 1 \le 4\right\}.$$

Stellen Sie die Mengen A, B, C und D sowie die nachfolgend aufgeführten Mengen dar:

(a) in Intervallschreibweise, ggf. als Vereinigung mehrerer Intervalle
(b) auf der (reellen) Zahlengeraden.

(i) $A \cap D$ (ii) $A \cup B \cup C \cup D$ (iii) $D \setminus B$ (iv) $B \setminus C$ (v) $(A \cup B) \setminus C$.

Aufgabe 4: Wir betrachten hier eine Menge M und Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung geeineter Quantoren und geeigneter mathematischer Symbole.
  (i) Der Schnitt zweier beliebiger Mengen aus $A_1, \ldots, A_n$ ist wieder eine Menge aus $A_1, \ldots, A_n$.
  (ii) Es existieren 2 Mengen aus $A_1, \ldots, A_n$, welche disjunkt sind.

  Hinweis: Es ist nützlich, die Menge der Indizes $I := \{1, \ldots, n\}$ zu verwenden.

(b) Geben Sie eine Menge M und Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ an, so dass alle Aussagen aus (a) wahr sind. Begründen Sie, weshalb die Aussagen für Ihr Beispiel gelten.

Aufgabe 5: Gegeben seien die Mengen $Z = \{1, \ldots, 20\}$ sowie A_0, A_1, A_2, A_3 und A_4 mit

$$A_n = \{x \in Z \mid 5 \text{ ist ein Teiler von } x - n\}, \quad n = 0, 1, \ldots 4$$

Zeigen bzw. begünden Sie, dass

(a) die Mengen A_n, $n = 0, 1, \ldots 4$, Teilmengen von Z sind,

(b) die Vereinigung der Mengen A_0, A_1, A_2, A_3 und A_4 der Menge Z entspricht und

(c) die Mengen A_n, $n = 1, \ldots, 4$, paarweise disjunkt sind, d.h., $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Die Mengen A_0, A_1, $\ldots$, A_4 heißen auch Zerlegung der Menge Z.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Zeigen Sie die folgenden Mengenbeziehungen:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (b) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$
(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Nutzen Sie bei (c) die Äquivalenz $((x, y) \in A \times B) \;\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge y \in B)$.

Aufgabe 7: Gegeben seinen die Mengen

$$M = \{-2, 2\} \quad \text{und} \quad N = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Nullstelle von } f(x) = x^2 - 4\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt $M = N$.

Aufgabe 8: Stellen Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise, evtl. als Vereinigung mehrerer Intervalle, oder durch Aufzählung aller darin enthaltenen Elemente dar.

(a) $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10,\ n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$
(b) $A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 1| \leq 4\}$
(c) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| \geq 4\}$
(d) $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 4x + 20 > 4\}$
(e) $A_2 \setminus A_1$
(f) $A_1 \cap A_4$

Aufgabe 9: Welche Teilmengenbeziehungen gelten zwischen den Mengen A, B, C, D, E?

(a) $A = \{1, 2, 3, 5\}$ (b) $B = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ 2 \text{ ist kein Teiler von } n\}$
(c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 \in \{121, 169\}\}$ (d) $D = \mathbb{P} = \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$
(e) $E = \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen)