# Formelübersicht zur Rohrströmung

## *Newtonsche Fluide*

### Geschwindigkeitsverteilung

**laminare Strömung:**

$$u = u_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad u_{eff} = \frac{1}{2} \cdot u_{max}$$

r ... radiale Ortskoordinate
R ... Radius des Rohres
$u_{max}$ ... maximale Strömungsgeschwindigkeit (im Zentrum des Rohres)
$u_{eff}$ ... mittlere Strömungsgeschwindigkeit

**turbulente Strömung (Näherung für gesamtes Profil):**

$$u = u_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad u_{eff} = \frac{2 \cdot n^2}{(1+n)\cdot(1+2\cdot n)} \cdot u_{max}$$

$$n = n\left(Re, \frac{D}{k}\right)$$ wobei: $$Re = \frac{\rho \cdot D \cdot u_{eff}}{\eta}$$

gute Näherung für $10^4 < Re < 10^5$: $n = 7$ (1/7-Potenzgesetz)

Re ... Reynolds-Zahl der Rohrströmung
D ... Durchmesser des Rohres
k ... Rohrrauhigkeit
$\rho$ ... Dichte des strömenden Mediums
$\eta$ ... Viskosität des strömenden Mediums

**turbulente Strömung in Wandnähe (*Universales Wandgesetz*):**

Bei turbulenten Strömungsvorgängen können mehrere Strömungsbereiche unterschieden werden:
In der ***turbulenten Kernströmung*** ist infolge der ständigen Vermischung von Turbulenzelementen ein ausgeglichenes Geschwindigkeitsprofil zu erwarten. In unmittelbarer Nähe der Wand, an der die äußerste Fluidschicht anhaftet, liegt hingegen eine laminare Strömung vor (rein viskose Impolsübertragung). Den Bereich zwischen ***laminarer Unterschicht*** und Kernströmung, in dem sowohl viskose als auch turbulente Vorgänge ablaufen, nennt man ***Überlappungsschicht***. Die Geschwindigkeitsverteilung in den wandnahen Bereichen wird für alle Strömungsformen mit dem universalen Wandgesetz beschrieben.

$$u'(y) = \begin{cases} y' & \text{if } y' \le 5 & \text{<— laminare Unterschicht} \\ (-3.09 + 5.03 \cdot \ln(y')) & \text{if } 5 < y' \le 30 & \text{<— Übergangsbereich} \\ (5.5 + 2.5 \cdot \ln(y')) & \text{if } 30 < y' & \text{<— Überlappungschicht} \end{cases}$$

wobei: $u' = \frac{u}{u_\tau}$ $\qquad y' = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu}$

mit $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}$ Wandschubspannungsgeschwindigkeit

**!Beachte:** Zu den Konstanten, wie auch zu den Bereichsgrenzen varieren die Literaturangaben.

## Rohrreibungsbeiwert

**Definition:** $\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u_{eff}^2$ Druckverlust aufgrund von Rohrreibung

$\lambda$ ... Rohrreibungsbeiwert
L ... Länge des Rohres
D ... Durchmesser des Rohres
$\rho$ ... Dichte des strömenden Mediums
$u_{eff}$ ... mittlere Strömungsgeschwindigkeit

**laminare Strömung:** $\lambda = \frac{64}{Re}$ wobei: $Re = \frac{\rho \cdot D \cdot u_{eff}}{\eta}$

**turbulente Strömung**

***hydraulisch glatt:***

exakte Lösung: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2.51}\right)$ (KARMAN & PRANDTL)

Näherungslösungen: $\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}}$ (BLASIUS, für $2320 < Re < 10^5$)

$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}$ (NIKURADSE, für $10^5 < Re$)

$\lambda = \frac{0.25}{\lg(Re)^2} + \frac{1}{\lg(Re)^3}$ (gute Näherung für alle Re-Zahlen)

$\lambda = \frac{0.262}{\lg(Re)^2} + \frac{0.935}{\lg(Re)^3}$ (sehr gute Näherung für alle Re-Zahlen)

***hydraulisch rau (Rauhigkeiten ragen aus laminarer Unterschicht heraus):***

vollrau (Rauhigkeiten bis weit in Überlappungsschicht): $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{3.71 \cdot D}{k}\right) = -2 \cdot \lg\left(\frac{0.27}{\frac{k}{D}}\right)$ (NIKURADSE, $\lambda > \left(\frac{200}{Re} \cdot \frac{D}{k}\right)^2$ & $Re > 1300 \cdot \frac{D}{k}$

moderat rau: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{0.27}{\frac{D}{k}}\right)$ (COLEBROOK)

## *Nicht-Newtonsche Fluide*

### Geschwindigkeitsverteilung, laminare Strömung

**OSTWALD-de-WAELE – Fluid:** $\tau = k \cdot \left(\frac{d}{dy} u\right)^n$

$$u = u_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \qquad u_{eff} = \frac{n+1}{3 \cdot n + 1} \cdot u_{max}$$

**BINGHAM – Fluid:** $\tau = \tau_0 + \eta_{Pl} \cdot \frac{d}{dy} u$ $\qquad r_0 = \frac{2 \cdot \tau_0 \cdot L}{\Delta p}$

$$u = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \eta_{pl} \cdot L} \cdot \begin{cases} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^2 & \text{if } r \le r_0 \\ \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{r_0}{R} + \frac{r}{R}\right) & \text{if } r_0 < r \end{cases}$$

$$u_{eff} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{24 \cdot \eta_{pl} \cdot L} \cdot \left[\left(\frac{r_0}{R}\right)^4 - 4 \cdot \frac{r_0}{R} + 3\right] = \frac{u_{max}}{6} \cdot \left[2 + \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^2\right]$$

### Rohrreibungsbeiwert

**OSTWALD-de-WAELE – Fluid:**

laminare Strömung: $\lambda = \frac{64}{Re}$ mit $Re = \frac{\rho \cdot D^n \cdot u_{eff}^{2-n}}{\frac{k}{8} \cdot \left(\frac{6 \cdot n + 2}{n}\right)^n}$

turbulente Strömung: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2.0}{n^{0.75}} \cdot \lg\left[Re \cdot \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{1 - \frac{n}{2}}\right] - \frac{0.2}{n^{1.2}}$ für $Re > 885 \cdot \frac{8 \cdot n \cdot (2+n)^{\frac{2+n}{1+n}}}{(1 + 3 \cdot n)^2}$

bzw. $\lambda = \frac{a}{Re^b}$ mit $a, b = f(n)$

**BINGHAM – Fluid:**

laminare Strömung: $\lambda = \frac{64}{Re_B} \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{He}{Re} - \frac{64}{3 \cdot \lambda^3} \cdot \frac{He^4}{Re_B^7}\right)$

$Re_B = \frac{\rho \cdot D \cdot u_{eff}}{\eta_{Pl}}$ Reynolds-Zahl

$He = \frac{\tau_0 \cdot \rho \cdot D^2}{\eta_{Pl}^2}$ Hedström-Zahl