Die Exponential- und Logaritmusfunktionen

1. Dezember 2022

Ziele aus dem Lehrplan der Klasse 9

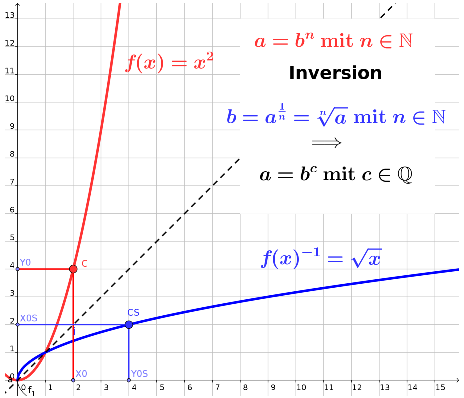
1. "Nutzung **heuristischer Verfahren**" [LP:S.25]
2. "systematisieren **Zahlenbereiche** und erkennen an ausgewählten Beispielen **Grenzen** mathematischer Verfahren und Theorien" [LP:S.25]
3. "Die Schüler erwerben bei der Beschäftigung mit **irrationalen Zahlen propädeutische Vorstellungen vom Unendlichen und vom Grenzwertbegriff**." [LP:S.25]

Aus dem Lehrplan der Klasse 9

Lernbereich 1: Funktionen und Potenzen

- Ausblick auf **reelle Zahlen**
- Potenzgesetze für natürliche und **rationale Exponenten**

Potenzen rationaler Exponenten als Lernvoraussetzung



Lehrplan Klasse 10

Lernbereich 4: Funktionale Zusammenhänge
Kennen des **Umkehrens von Funktionen**

- Beziehung zwischen Funktion und Umkehrfunktion
- Umkehrung der Exponentialfunktionen (**Begriff Logarithmus**)

Kennen von **Zahlenfolgen** als speziellen Funktionen

Robert Musil und die Mathematik

"... das sind zwei unerhört scharfsinnig verflochtene Systeme von Zahlen und Striche, [] zwei weiß lackierte, ineinander gleitende Stäbchen von flach trapezförmigen Querschnitt, mit deren Hilfe man die verwickeltesten Aufgaben im Nu lösen kann, ohne einen Gedanken nutzlos zu verlieren."[Musil:S.37]

Definitionen des Logarithmus

- Als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
- Als Lösung der Funktionalgleichung $F(x \cdot y) = F(x) + F(y)$
- Als Isomorphismus $F : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$
- ...

Wichtige historische Beiträge [Klein:S155ff]

- **Michael Stifl** (1544) Rechnen von Potenzen von beliebigen **rationalen Exponenten**, **Multiplikationsregel**, erste Logarithmentafel (-3 bis 6)
- **Jobst Bürgi**, **John Napier** (1614)
  "Erfindung" der **ersten wirklichen Logarithmentafeln**
- **Johannes Kepler** (um 1620) **Anwendung der Logarithmentafel** (3. Gesetz)
- **Nicolaus Mercator** (1668) **Potenzreihe** für den Logarithmus
- **Isaac Newton** (1669) Methode der Reihenumkehrung $\Longrightarrow$ **Exponentialreihe**
- **Jakob Bernoulli** Praktisches Problem der stetigen Verzinsung (um 1700)
- **Leonhard Euler** (1748) Beziehung der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ und der Exponentialreihe

Die genetische Methode

- "... alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie wieder als lebensvollen Wesen vor uns erstehen."[Toeplitz:S.V]
- "Unerschöpflich kann man so aus der Historie für die didaktische Methode lernen."[Toeplitz:S.VI]

Mathematik hat Folgen

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

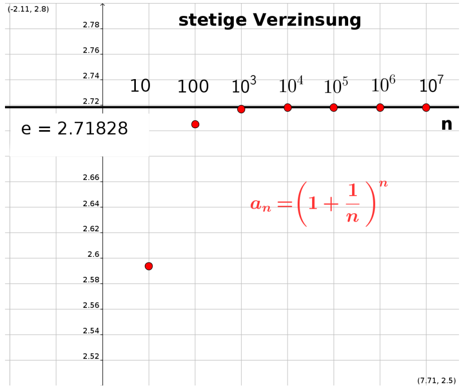
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.7182818$$

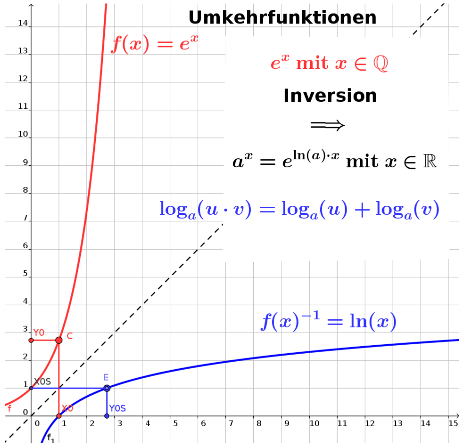
$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Die Eulersche Zahl und die stetige Verzinsung

Basierend auf einer Idee von Jakob Bernoulli:



Der Logarithmus als Umkehrung der Exponentialfunktion



Von der geometrischen Folge zur Logarithmusfunktion

Logarithmus im Bürgischen System:
Analyse der Einzelschritte der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ mit n = 10000.
Darstellung in einem kartesischen Koordinatensystem (y,x).

$$x = (1.0001)^z, \qquad x + \Delta x = (1.0001)^{z+1}$$

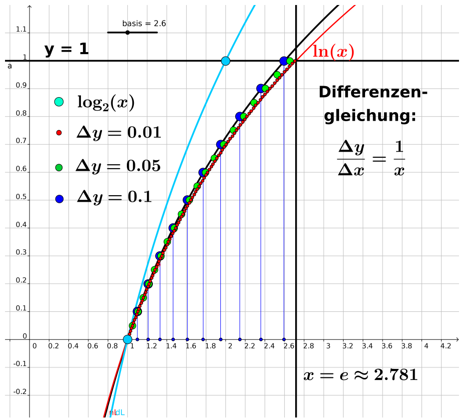
$$\Delta x = (1.0001)^z \cdot (1.0001 - 1) = \frac{x}{10^4}, \qquad \Delta z = 1$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}$$

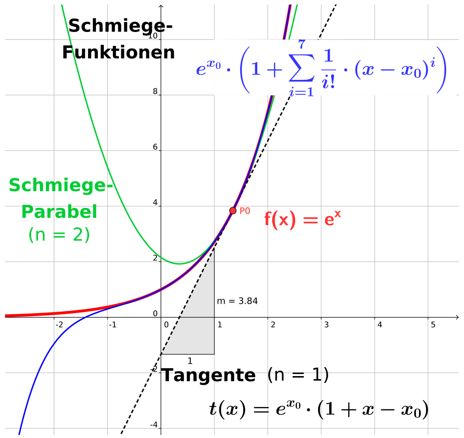
betrachtet man die Zahlen $y = \frac{1}{10^4}$ ergibt sich die Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

Die Erfindung des Logarithmus



Ein Ausblick auf die Exponentialreihe



Verallgemeinerung aus dem Bereich der Zahlen in den Bereich der Funktionen

Ausgangspunkt ist die Summe

$$e_{\text{approx}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Beispielsweise Übergang zu einer Parabel

$$e^{x_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots\right)$$

Literatur

Quellen:

[LP] "Lehrplan Gymnasium Mathematik",2013
[Toeplitz] Toeplitz Otto, "Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung"
[Klein] Klein Felix, "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus", Band I
[Musil Robert] "Der Mann ohne Eigenschaften"

"Von Ulrich konnte man mit Sicherheit das eine sagen, daß er die Mathematik liebte, wegen der Menschen, die sie nicht austehen mochten." [Musil]