TU Bergakademie Freiberg
Dr. M. Winkler

Freiberg, 8. November 2024
Abgabe am 22. November 2024

Optimierung für Mathematiker/innen

Übung 5

Aufgabe 21: Papier-Zuschneide-Problem: Modellierung

Eine Papierfabrik produziert Papierrollen mit einer Breite von 3m. Für die Kunden muss die Fabrik die Rollen auf die gewünschte Breite zurechtschneiden. Eine Papierrolle kann beispielsweise in 2 x 0,93m und 1 x 1,08m geteilt werden. Die verbleibenden 0,06m sind Abfall. Der Fabrik liegen die folgenden Aufträge vor:

- 97 Rollen mit einer Breite von 1,35m,
- 610 Rollen mit einer Breite von 1,08m,
- 395 Rollen mit einer Breite von 0,93m,
- 211 Rollen mit einer Breite von 0,42m.

Die Fabrik möchte zur Erfüllung des Auftrages so wenig Rollen wie möglich einsetzen. Wie müssen diese geschnitten werden? Modelliere des Problem als lineares Optimierungsproblem.

Aufgabe 22: Arbitrage im Devisenhandel

Wir betrachten den internationalen Geldhandel. Für zwei gegebene Währungen ist ein gewisser Umtauschsatz festgelegt. Betrachten wir die Währungen USD, Yen, Mark und Franc und bezeichnen wir mit w_{ij} den Umtauschkurs von Währung i in Währung j, so lagen am 10. November 1996 folgende Umtauschkurse vor:

$$W = \begin{pmatrix} - & 111.52 & 1.4987 & 5.0852 \\ 0.008966 & - & 0.013493 & 0.045593 \\ 0.6659 & 73.964 & - & 3.3823 \\ 0.1966 & 21.933 & 0.29507 & - \end{pmatrix}.$$

Wechselt man nun 1 USD in Yen, dann in Mark und wieder zurück in USD, so erhält man 1.002 USD. Dies ist natürlich im Geldhandel nicht erwünscht. Gib ein lineares Programm an, mit dem überprüft werden kann, ob bei einer gegebenen Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (die Diagonalelemente w_{ii} können ignoriert werden) für n Währungen eine solche Situation möglich ist.

Aufgabe 23: Überführen auf Normalform am Beispiel

Gegeben ist die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \min & -2v_1 & - & 3v_2 & - & 4v_3 & & \\ \text{sodass} & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & \leq & 4 \\ & & & 3v_2 & + & v_3 & \leq & 6 \\ & & & & & \multicolumn{3}{r}{v_1 \leq 2,\, v_3 \leq 3\ .} \end{array}$$

Überführe das lineare Optimierungsproblem auf Normalform.

Aufgabe 24: Grafisches Lösen eines LPs

Lösen Sie grafisch folgende Aufgabe der linearen Optimierung

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^\top x & & \\ \text{sodass} & x_1 & \geq & -x_2 \\ & x_1 & \geq & -\frac{1}{2} \\ & x_2 & \in & [-1, 1] \end{array}$$

mit verschiedenen Kostenvektoren $c \in \{(-1,0)^\top, (-1,-2)^\top, (0.01,-2)^\top\}$.

Hausaufgabe 11: Implementation des globalisierten Newton-Verfahrens

Implementiere das globalisierte Newton-Verfahren mit allgemeinen Skalarprodukt und Armijo-Schrittweitenstrategie in Matlab (Algorithmus 5.11 aus der Vorlesung). Verwende das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b). Erstelle dazu eine Datei `newton_method.m` und verwende

```
function X = newton_method(fh, M, x0, tol, s, sigma, beta, rho, p)
```

als erste Zeile. Dabei bezeichnet `fh` das Handle auf eine Funktion, `M` die Skalarprodukt induzierende Matrix, `x0` den Startpunkt, `tol` eine Struktur, welche die vier Parameter `ATOL_f`, `RTOL_f`, `ATOL_x` und `RTOL_x` für das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b) enthält, `s`, `sigma` und `beta` die Parameter für die Armijo-Schrittweitensuche und `rho` und `p` die im Algorithmus 5.11 verwendeten Parameter, um eine gute Abstiegsrichtung zu gewährleisten. Zurückgegeben werden soll eine Matrix $X = [x0, x1, x2, \ldots]$, welche den gesamten Iterationsverlauf enthält.

Teste das implementierte Verfahren an den Funktionen aus Übung 3, Hausaufgabe 7. mit `rho`$=1$ und `p`$=3$. Visualisiere den Iterationsverlauf und vergleiche die hier benötigten Iterationen mit denen des Gradienten-Verfahrens.

Schicke die erzeugten Dateien an `max.winkler@math.tu-freiberg.de` (Betreff: HA Optimierung für Mathematiker/innen Übung 5)!

Hinweis 1: Es können die Dateien von der Webseite der Lehrveranstaltung verwendet werden. Mit dem Skript `solution_ha_11.m` kann die Implementierung getestet werden. Ferner werden die Dateien `cosine.m`, `himmelblau.m`, `rosenbrock.m` und `general_quadratic_function.m` von Übung 3, Hausaufgabe 7 benötigt.

Hinweis 2: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren.

Hausaufgabe 12: Formulierung als lineare Optimierungsprobleme

Formuliere folgende Probleme als lineare Optimierungsprobleme (nicht notwendig in Normalform):

(a)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1$$

(b)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty$$

dabei sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$ sowie $\|y\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} |y_i|$.