Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
M. Hamann, M. Meinhold

9. Feburuar 2021

Prüfungsklausur - Mathematik 1 (I958)

Name, Vorname:	Note: ....
Matr.-Nr.:	....
Unterschrift:	(Unterschrift des Prüfenden)

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **150 Minuten**.
- Die mit *Zusatz* gekennzeichnete Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe, wofür zusätzliche Punkte erworben werden können.
- Nutzen Sie ausschließlich DIN A4 Blätter. Alle Blätter sind mit Ihrem *Namen* und *Matrikelnummer* zu versehen.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Lösungswege aller Aufgaben sind *vollständig und nachvollziehbar* anzugeben. Insbesondere sind Lösungswege so darzustellen, dass sie mit einem handelsüblichen wissenschaftlichen Taschenrechner (nicht-graphikfähig, ohne Computeralgebrasystem, nicht-programmierbar) berechenbar sind.
- Kreuzen Sie auf der unten angegebenen Tabelle an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.

Hinweise zum Ablauf der Online-Prüfung:

- Die Prüfungszeit beginnt um 11:30 Uhr und endet um 14:00 Uhr. Die Klausuraufgaben werden 5 Minuten vor Prüfungsbeginn im Prüfungskurs freigeschaltet unter

  `https://exam.htw-dresden.de/opal/auth/RepositoryEntry/16678935`
- Sie haben Zeit **bis 10 Minuten nach Prüfungsende**, Ihre Ergebnisse zu scannen / zu fotographieren und vorzugsweise im pdf-Format im Prüfungskurs hochzuladen.
- Nutzen Sie für Kommunikation im Notfall den BBB-Raum

  `https://ibbb.informatik.htw-dresden.de/b/mar-lsb-lt8-cgu`

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Bearbeitet									
Mögliche Punkte	8	13	12	9	10	14	4	4	70+4
Erreichte Punkte									

Aufgabe 1

(a) Begründen Sie, dass sich der Logarithmus einer reellen Zahl $a > 0$ zur Basis $b > 0$ darstellen lässt als Nullstelle der Funktion f mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = b^x - a$$

(b) Berechnen Sie näherungsweise den Logarithmus

$$\log_b a \quad \text{für} \quad a = 128.0, \quad b = 5$$

mit dem Newton-Verfahren, indem Sie 2 Iterationen des Verfahrens durchführen. Wählen Sie hierfür den Startwert $x_0 = 3$.
Hinweis: Es reicht hier nicht aus, eine Näherung von $\log_5 128.0$ mithilfe des Taschenrechners anzugeben.

Aufgabe 2

Gegeben sind die komplexe Zahl z mit

$$z = 1 - i \quad \text{wobei} \quad i^2 = -1$$

und deren komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$.

(a) Berechnen Sie schriftlich die Potenz

$$p = ({}^{z}/_{\bar{z}})^{13} \tag{1}$$

und geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an.

Hinweis: Sollte die Potenz p nicht berechnet worden sein, verwenden Sie in Teilaufgabe (b) den Wert $p = -1$.

(b) Berechnen Sie schriftlich alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$w^6 = \frac{1}{p}$$

und geben Sie diese in Exponentialform bzw. Polarform an.

(c) Stellen Sie die Lösungen aus Aufgabenteil (b) als Punktmenge in der Gaußschen Zahlenebene dar. Begründen Sie, dass diese Punkte ein reguläres 6-Eck bilden.

Aufgabe 3

Gegeben ist algebraische Gleichung $p(x) = 0$ mit

$$p(x) = 1 \cdot x^6 + (-3) \cdot x^5 + (-23) \cdot x^4 + (77) \cdot x^3 + (-24) \cdot x^2 + (80) \cdot x^1 \tag{2}$$

(a) Ermitteln Sie alle rationalen Lösungen der algebraischen Gleichung $p(x) = 0$ zu (2).

(b) Prüfen Sie, ob $x = i$ mit $i^2 = -1$ Lösung der algebraischen Gleichung $p(x) = 0$ zu (2) ist.

Hinweis: In algebraischen Gleichungen mit ausschließlich reellen Koeffizienten treten Lösungen $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ paarweise konjugiert auf.

(c) Geben Sie für das Polynom $p(x)$ aus Formelzeile (2) die Produktdarstellung in Linearfaktoren an. Entscheiden und begründen Sie, ob $p(x) = 0$ Lösungen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besitzt.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} (9 \cdot k - 6)$$

mit oberem Summationsindex $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie den Summenwert für $n = 20$.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (9 \cdot k - 6) = \frac{n(9 \cdot n + (-3))}{2} \tag{3}$$

Aufgabe 5

(a) Durch Erwärmen vergrößert sich der Radius einer Kugel von $r_1 = 19\text{mm}$ auf $r_2 = 19.075\text{mm}$. Berechnen Sie mithilfe des Differentials $\mathrm{d}A$ die (ungefähre) relative Zunahme der Kugeloberfläche.

(b) Bestimmen Sie, mit welcher Genauigkeit der Durchmesser D einer Kugel zu messen ist, wenn der relative Fehler der daraus berechneten Kugeloberfläche unter 9% liegen soll.

Aufgabe 6

Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin(9x)$$

werde als ebene Kurve c betrachtet.

(a) Berechnen Sie die Stelle x_0 im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{9}\right]$, an welcher die Kurve c die stärkste Krümmung aufweist.

(b) Berechnen Sie den Radius und den Mittelpunkt des Krümmungskreises an die Kurve c im Punkt $P(x_0, f(x_0))$.

(c) Skizzieren Sie die Kurve c für $x \in \left[0, \frac{\pi}{9}\right]$ und den Krümmungskreis an die Kurve im Punkt $P(x_0, f(x_0))$.

Aufgabe 7

Gegeben ist die eine gewöhnliche Zykloide[1] c als Wertebereich der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot t - 9 \cdot \sin t \\ 9 - 9 \cdot \cos t \end{pmatrix} \tag{4}$$

Berechnen Sie die Punkte $P(t_0) \in c$ mit minimaler Momentangeschwindigkeit. Geben Sie in $P(t_0)$ den Betrag der Momentangeschwindigkeit an mit

$$v(t_0) = \sqrt{\left(\dot{f}_1(t_0)\right)^2 + \left(\dot{f}_2(t_0)\right)^2}$$

[1]Rollt ein Kreis auf einer Geraden, so beschreibt ein fest auf dem Rollkreis liegender Punkt eine gewöhnliche Zykloide.

Zusatz

Aufgabe 8

(a) Gegeben sind

$$Q_1 = 9 - 6 \cdot k \quad \text{und} \quad Q_2 = 9 + 7 \cdot i - 7 \cdot j$$

worin i, j und k die quaternionalen Einheiten beschreiben.
Berechnen Sie die Produkte $Q_1 \cdot Q_2$ und $Q_2 \cdot Q_1$ mit Hilfe der Produktregeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i \quad \text{und} \quad k \cdot i = j \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie, dass mit den Produktregeln in Formelzeile (5) ebenfalls folgen

$$j \cdot i = -k, \quad i \cdot k = -j \quad \text{und} \quad k \cdot j = -i$$

Hinweis: Die Eigenschaft der Assoziativität des quaternionalen Produkts kann ohne Nachweis verwendet werden.