Folien zur Lehrveranstaltung

Mathematik für Medieninformatik

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Kapitel 1

Grundlagen

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Lernziele dieses Kapitels

In diesem Kapitel lernen Sie allgemeine elementare Begriffe der Mathematik kennen, die für die weitere Beschäftigung mit dem Fach unabdingbar sind. Dazu zählen

- Aussagen und Aussageverbindungen,
- Prädikate und Quantoren,
- Mengen und ihre Verknüpfungen.

Dazu werden Sie zahlreiche kleine Hilfsmittel kennenlernen, die Sie beim Verständnis des Stoffes unterstützen.

Inhalt

von Kapitel 1: Grundlagen

Elementare Logik

Aussagen

Definition (Aussage)

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder *wahr* oder *falsch* ist. Aussagen werden im Folgenden mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
Der Wahrheitswert einer Aussage A ist

$$\mathrm{Wert}(A) := \begin{cases} 1 & \text{, falls Aussage } A \text{ wahr ist,} \\ 0 & \text{, falls Aussage } A \text{ falsch ist.} \end{cases}$$

(Nicht-)Beispiele

(i) A: $3 + 5 = 9$.
(ii) B: 3 ist Teiler von 6.
(iii) C: $2^{100} + 1$ ist eine Primzahl.
(iv) D: Er ist sympathisch.
(v) E: $2 + x = 4$

Elementare Aussageverbindungen

Symbolik	**Bezeichnung**	**Sprechweise**
$\neg A$ bzw. $\overline{A}$	Negation	“nicht A”
$A \wedge B$	Konjunktion	“A und B”
$A \vee B$	Disjunktion, inkl. “Oder”	“A oder B”
$A \triangle B$	Kontravalenz, exkl. “Oder”	“entweder A oder B”
$A \Rightarrow B$	Implikation	“wenn A, dann B”; “aus A folgt B”
		“A impliziert B”
		“A ist hinreichend für B”
		“B ist notwendig für A”
		“A ist Prämisse”
		“B ist Konklusion”
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	“A genau dann, wenn B2
		"A dann und nur dann, wenn B“
		"A ist notwendig und hinreichend für B“

Elementare Aussageverbindungen

Beispiele

(i) Alois liebt Ulla oder Jutta.
- Teilaussagen:
- Verknüpfung:

(ii) Alois liebt entweder Ulla oder Jutta.
- Teilaussagen:
- Verknüpfung:

(iii) Wenn wir unsere Arbeit geschafft haben und es regnet nicht, dann grillen wir abends.
- Teilaussagen:
- Verknüpfung:

Elementare Aussageverbindungen

Wahrheitstabellen

Wahrheitstabellen enthalten die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen. Für die obigen elementaren Aussagenverbindungen ergeben sich:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \triangle B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1*	0
0	0	1	0	0	0	1*	1

* "Ex falso quodlibet."

Elementare Aussageverbindungen

Wahrheitstabellen – Beispiele

Aufgabe (Wahrheitstabellen)

Stellen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussageverbindungen jeweils mit Hilfe einer Wahrheitstabelle dar.

(i) Es stimmt nicht, dass Alois entweder Ulla oder Jutta liebt.

Teilaussagen: A: Alois liebt Ulla, B: Alois liebt Jutta.

A	B	$A \triangle B$	$\neg(A \triangle B)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$\neg(A \triangle B)$: Alois liebt weder Ulla noch Jutta, oder er liebt beide.

Elementare Aussageverbindungen

Wahrheitstabellen – Beispiele

Aufgabe (Wahrheitstabellen)

Stellen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussageverbindungen jeweils mit Hilfe einer Wahrheitstabelle dar.

(ii) Wenn mein Hund ein Kommando richtig befolgt hat, bekommt er als Belohnung ein Leckerli oder sein Lieblingsspielzeug.

Elementare Aussageverbindungen

Wahrheitstabellen – Beispiele

Aufgabe (Einbruch)

Es hat einen Einbruch gegeben und die Polizei hat drei Verdächtige festgenommen. Kommissar Moser versucht nun durch logische Schlussfolgerungen den oder die Täter zu ermitteln:

"Klose ist nicht clever genug sowas alleine durchzuziehen, der würde immer seinen Kumpel Lehmann mitnehmen. Lehmann und Müller können nicht miteinander, die haben garantiert kein Ding zusammen gedreht. Wenn Lehmann oder Müller unschuldig ist, dann muss Klose ein Täter sein."

Helfen Sie bei der Aufklärung des Falles!

Elementare Aussageverbindungen

Tautologie

Definition (Tautologie)

Eine Aussageverbindung $T = T(A, B, \dots)$ heißt Tautologie (Identität), falls sie für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen $A, B, \dots$ stets wahr ist.

Beispiele

(i)	$A \vee \neg A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
(ii)	$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Kettenschluss
(iii)	$[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$	Abtrennungsregel
(iv)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontrapositionsschluss
(v)	$[B \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow A$	indirekter Beweis

Elementare Aussageverbindungen

Tautologie – Aufgabe

Aufgabe (Tautologie)

Zeigen Sie, dass folgende Bauernweisheit eine Tautologie ist:

"Kräht der Hahn auf dem Mist,
ändert sich's Wetter oder's bleibt wie es ist."

Elementare Aussageverbindungen

Kontradiktion, Logische Gleichwertigkeit

Definition (Kontradiktion)

Eine Aussagenverbindung $T = T(A, B, \dots)$ heißt Kontradiktion (logischer Widerspruch), falls sie für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen $A, B, \dots$ stets falsch ist.

Beispiel $A \wedge \neg A$ *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch*

Definition (Logische Gleichwertigkeit)

Zwei Aussagenverbindungen $S = S(A, B, \dots)$ und $T = T(A, B, \dots)$ heißen äquivalent (logisch gleichwertig), in Zeichen $S \equiv T$, falls $Wert(S) = Wert(T)$ für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen $A, B, \dots$ gilt.

Elementare Aussageverbindungen

Kontradiktion, Logische Gleichwertigkeit – Beispiel

A: Paul mag Mathe., B: Paul mag Deutsch.

$$S = \neg(A \wedge B), \quad T = \neg A \vee \neg B$$

Regeln und Gesetze

$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$	Kommutativgesetze
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C,$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$	Assoziativgesetze
$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C),$ $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	Distributivgesetze
$A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$	Idempotenzgesetze
$\neg(\neg A) \equiv A$	doppelte Verneinung
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B,$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	De Morgan´sche Gesetze
$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Auflösen von Implikationen
$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	Auflösen von Äquivalenzen

Regeln und Gesetze

Aufgabe

Aufgabe

Zeigen Sie mit Hilfe äquivalenter Umformungen, dass der indirekte Beweis

$$[B \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow A$$

eine Tautologie ist.

Aussageformen

Aussagen sind Aussagen über Eigenschaften von Objekten oder über Beziehungen zwischen Objekten.

Definition (Prädikat)

Ein Prädikat spiegelt eine Eigenschaft oder eine Beziehung wider.

Beispiele

(i)	$\cdots$ ist Primzahl	(iii)	$\cdots$ liegt zwischen $\cdots$ und $\cdots$
(ii)	$\cdots$ teilt $\cdots$	(iv)	$\cdots$ ist das Produkt von $\cdots$ und $\cdots$

Definition (Aussageform)

Trägt man in mindestens eine der obigen Leerstellen $\cdots$ eine Variable (und ggf. in den anderen Leerstellen Konstanten) ein, so entsteht eine Aussageform.

Aussageformen

Beispiele

(i)	$A(x)$:	x ist sympathisch.
(ii)	$B(x)$:	x ist Primzahl.
(iii)	$C(a, b)$:	a teilt b.
(iv)	$D(y)$:	y liegt zw. 2 und 3.
(v)	$E(x, y, z)$:	z ist das Produkt von x und y.

Quantifizierung

Eine Aussageform kann durch Quantifizierung, z.B. mittels der folgenden Quantoren, zu einer Aussage gemacht werden.

Operatoren (Quantoren)

Symbolik	**Bezeichnung**	**Sprechweise**
$\forall$	Allquantor	“für alle, für jedes”
$\exists$	Existenzquantor	“es existiert (mindestens) ein“

Quantoren

All- und Existenzaussagen

Gegeben: Grundbereich X (Menge von Objekten), Aussageform $H(x)$.

Symbolik	**Bezeichnung**	**Sprechweise**
$\forall x \in X: \ H(x)$	Allaussage	"Für alle x aus der Menge X gilt $H(x)$."
$\exists x \in X: \ H(x)$	Existenzaussage	"Es existiert ein x in X, für welches $H(x)$ gilt."

(Für die genaue Definition des $\in$-Zeichens, siehe Kapitel "Mengen".)

Quantoren

All- und Existenzaussagen – Aufgabe

Aufgabe (All- und Existenzaussagen)

Definieren Sie geeignete Grundbereiche und Aussageformen und schreiben Sie die folgenden Sätze als All- oder Existenzaussagen auf:

(a) Alle natürlichen Zahlen sind auch ganze Zahlen.
(b) Es gibt eine gerade Primzahl.
(c) Wale sind Säugetiere.
(d) Es gibt Menschen, die einfach nicht zuhören können.

Quantoren

Negation von All- und Existenzaussagen

$\neg(\forall x \in X : H(x)) \equiv \exists x \in X : (\neg H(x))$	Negation einer Allaussage
$\neg(\exists x \in X : H(x)) \equiv \forall x \in X : (\neg H(x))$	Negation einer Existenzaussage

Quantoren

Negation von All- und Existenzaussagen – Aufgabe

Aufgabe (Negation von All- und Existenzaussagen)

Negieren Sie die folgende Aussage und machen Sie die Allaussage zu einer Existenzaussage bzw. umgekehrt.

(a) A: Alle Studierenden bestehen die Matheprüfung.

Gesucht: Negation dieser Aussage: $\neg A$
X - Menge der Studenten
$H(x)$ - Student x besteht die Matheprüfung

$$A \equiv (\forall x \in X : H(x)) \quad \rightsquigarrow \quad \neg A \equiv (\exists x \in X : \neg H(x))$$

$\neg A$: Es gibt einen Studenten, der die Matheprüfung nicht besteht.

Quantoren

Negation von All- und Existenzaussagen – Aufgabe

Aufgabe (Negation von All- und Existenzaussagen)

Negieren Sie die folgende Aussage und machen Sie die Allaussage zu einer Existenzaussage bzw. umgekehrt.

(b) B: Es gibt einen Mann, den alle Frauen lieben.

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Elementare Logik)

1. Sie erklären, was eine logische **Aussage** ist und wie sie sich von anderen sprachlich und grammatikalisch korrekten Sätzen unterscheidet.
2. Sie wandeln ausformulierte **Aussageverbindungen** in symbolische Schreibweise um und umgekehrt.
3. Sie bestimmen den **Wahrheitswert** von Aussageverbindungen in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Teilaussagen und ihrer Verknüpfungen und erstellen **Wahrheitstabellen**.
4. Sie begründen mit Hilfe äquivalenter Umformungen, dass eine Aussage eine **Tautologie** ist.
5. Sie unterscheiden **Aussagen** und **Aussageformen** und nennen eigene Beispiele.
6. Sie formulieren mathematische quantifizierbare Aussageformen vermöge der entsprechenden **Quantoren** und vice versa.

Inhalt

von Kapitel 1: Grundlagen

Mengen und Elemente

Grundbegriffe (Menge, Element)

Eine Menge M ist die Gesamtheit bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zu M gehört oder nicht. Die zu M gehörigen Objekte heißen Elemente von M.

Schreibweisen

- $a \in M$: a ist Element von M.
- $a \notin M$: a ist kein Element von M.

Die leere Menge $\varnothing$ bzw. $\{\}$ enthält keine Elemente.

Die Grundmenge G enthält sämtliche Objekte des Grundbereiches, der in einem bestimmten Zusammenhang betrachtet wird.

Mengen werden im Folgenden mit Großbuchstaben $M, A, B, \ldots$ und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben $x, a, b, \ldots$ bezeichnet.

Mengen und Elemente

Darstellung von Mengen

Mengen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden, u.a. durch:

(a) Aufzählung aller ihrer Elemente

Es sei $M = \{a_1, a_2, \dots\}$. Dann gilt

$x \in M \iff (x = a_1) \lor (x = a_2) \lor \dots$

(b) Angabe einer charakteristischen Eigenschaft

$M = \{x \in G \mid E(x)\}$ mit der gegebenen Grundmenge G und der Aussageform $E(x)$

Gesprochen: M ist die Menge aller x aus G, für die $E(x)$ gilt.

$x \in M \iff x \in G \land \mathrm{Wert}(E(x)) = 1$

(c) Bildlich

z.B. durch VENN-Diagramme.

Mengen und Elemente

Darstellung von Mengen – Beispiele

(i) $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$

(ii) $V_k := \{x \in \mathbb{N} \mid x = k \cdot n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \{0, k, 2k, 3k, \dots\}$

(iii) $T_k := \{x \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } x\}$

Bemerkung: $T_k = V_k$ für alle natürlichen Zahlen $k \geqslant 1$, da gilt

$$x \in T_k \Leftrightarrow k \text{ teilt } x \Leftrightarrow x = kn \text{ mit } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in V_k$$

(iv) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\} \subseteq \mathbb{P}$

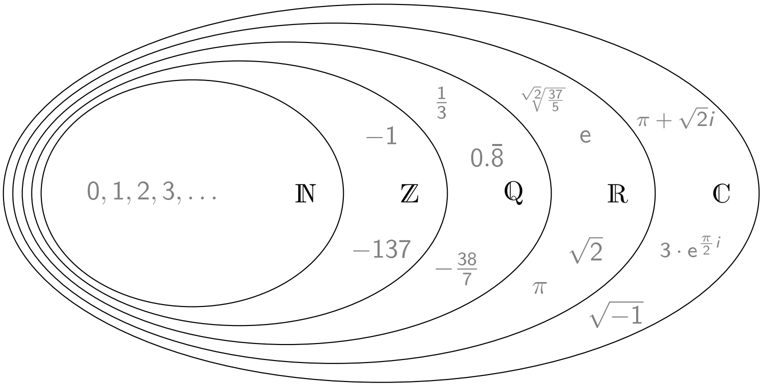
Mengen und Elemente

Standardmengen

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_+$	Menge der positiven natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \in \mathbb{N}_+\right\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{I}$	Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
	$\{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1\}$
$\mathbb{H}$	Menge der Quaternionen

Mengen und Elemente

Standardmengen – Darstellung mittels VENN-Diagrammen



Teilmengen von $\mathbb{R}$

Intervalle

In $\mathbb{R}$ kann man auch Intervalle nutzen. Für $a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b$ gilt:

Symbol	Bedeutung	Sprechweise
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$	rechtsseitig halboffenes Intervall von a bis b
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$	linksseitig halboffenes Intervall von a bis b
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall von a bis b

- Bei (halb-)offenen Intervallen ist auch $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ möglich.

Teilmengen von $\mathbb{R}$

Intervalle – Beispiele

(i) $[3, 5)$ (ii) $[-1, 2]$ (iii) $(-\infty, 0]$ (iv) $(5, \infty)$

Mengen und Elemente

Gleichheit von Mengen, Teilmenge

Definition (Mengengleichheit)

Die Mengen A und B sind gleich, geschrieben $A = B$, wenn sie dieselben Elemente besitzen, d.h. wenn alle Elemente zu A gehören genau dann, wenn sie auch zu B gehören:

$$A = B \iff \forall x : \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Definition (Teilmenge)

A ist Teilmenge von B, geschrieben $A \subseteq B$, wenn alle Elemente von A auch zu B gehören:

$$A \subseteq B \iff \forall x : \ (x \in A \implies x \in B).$$

A ist echte Teilmenge von B, geschrieben $A \subset B$, wenn alle Elemente von A auch zu B gehören, aber A und B verschieden voneinander sind (d.h. B muss mindestens ein Element haben, das nicht zu A gehört):

$$A \subset B \iff A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B.$$

Mengen und Elemente

Gleichheit von Mengen, Teilmenge – Bemerkung und Beispiele

Bemerkung

Mittels der Teilmengenbeziehung lässt sich die Gleichheit von Mengen jetzt auch noch anders erklären und zwar:

$$A = B \iff A \subseteq B \ \land \ B \subseteq A.$$

Beispiele

Mengen und Elemente

Mächtigkeit von Mengen

Definition (Mächtigkeit)

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge A, geschrieben $|A|$, ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist abzählbar, falls ihre Elemente nummeriert werden können (z.B: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$); andernfalls ist sie überabzählbar (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Elementare Mengenoperationen

Symbolik	**Bezeichnung**	**Sprechweise**	**Bedeutung**
$A \cap B$	Durchschnitt	A geschnitten B	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cup B$	Vereinigung	A vereinigt B	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \setminus B$	Differenz	A ohne B	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	Komplement von A bzgl. G	A Komplement	$\{x \mid x \in G \wedge x \notin A\} = G \setminus A$
$A \triangle B$	Symmetrische Differenz	A symmetrische Differenz B	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Elementare Mengenoperationen

Aufgabe

Aufgabe (Elementare Mengenoperationen)

Gegeben (siehe Beispiel oben):

- $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- $T_k = \{x \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } x\}$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $T_3 \cap T_2$,
(b) $\mathbb{P} \cap T_3$,
(c) $\mathbb{P} \cap T_4$,
(d) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\}$,
(e) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 5\}$,
(f) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 5\}$,
(g) $[1, 5) \cap (3, 7]$,
(h) $[1, 5) \cup (3, 7]$,
(i) $[1, 5) \setminus (3, 7]$.

Aufgabe

Aufgabe (Venn-Diagramme)

Unter 100 Studierenden wird eine Umfrage nach deren Lieblingssportart durchgeführt, wobei nur nach Schwimmen, Volleyball und Fußball gefragt wird. Es stellt sich heraus, dass 12 Studierende gern Fußball spielen, aber weder für Volleyball noch für Schwimmen zu begeistern sind. Fünf Befragte spielen gern Volleyball, aber nicht Fußball, und gehen auch nicht schwimmen. 50 Studierende betreiben genau zwei der Sportarten gern, darunter 25, die gern Fußball und Volleyball spielen, und zehn, die gern Fußball spielen und gern Schwimmen gehen. Genau acht Befragte betreiben alle drei Sportarten gern und 13 machen am liebsten gar keinen Sport.

(a) Wieviele Studierende gehen gern schimmen, aber spielen weder gern Volleyball noch Fußball?

(b) Wieviele Studierende schwimmen nicht gerne?

(c) Wieviele Studierende, die gern Fußball spielen, spielen nicht gern Volleyball?

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

Aufgabe – Lösung

Aus dem Text ist gegeben:

12 Stud. betreiben F, aber nicht S und nicht V.
5 Stud. betreiben V, aber nicht F und nicht S.

8 Stud. betreiben F, S und V.

F: Menge der Studenten, die gern Fußball spielen

V: Menge der Studenten, die gern Volleyball spielen

S: Menge der Studenten, die gern schimmen gehen

50 Stud. betreiben genau 2 Sportarten, davon betreiben 25 Stud. F und V, 10 F und S.
13 Stud. betreiben keinerlei Sport.

Mengenoperationen

n-Tupel

Definition (n-Tupel)

Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $(a_1, \ldots, a_n)$ geordnetes n-Tupel.

Bemerkungen

- Im Unterschied zur Aufzählung von Elementen einer Menge spielt im n-Tupel die **Reihenfolge** der a_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) eine Rolle.
- Folglich ist die Gleichheit zweier n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ ist definiert als

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad a_i = b_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Beispiele: Koordinaten eines Punktes in der xy-Ebene (*kartesisches Koordinatensystem*), Vektoren.

Mengenoperationen

Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Es seien die zwei Mengen A und B gegeben. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

kartesisches Produkt von A und B.

Für mehr als zwei Mengen lässt sich diese Definition wie folgt verallgemeinern:

- $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
- $A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Mengenoperationen

Kartesisches Produkt – Beispiele

(i) $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

(ii) $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

(iii) $[0, 1] \times (-1, 2]$

Wichtige Regeln und Gesetze

Teil I

Mengenverknüpfung(en)	**Bezeichnung**
$A \subseteq A$	Reflexivität
$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	Transitivität
$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetze
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$	Assoziativgesetze
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetze

Wichtige Regeln und Gesetze

Teil II

Mengenverknüpfung(en)	**Bezeichnung**
$A \cap A = A, \quad A \cup A = A$	Idempotenzgesetze
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Formeln von DE MORGAN
$A \cap \overline{A} = \emptyset,\ A \cup \overline{A} = G,\ \overline{\overline{A}} = A$	Operationen mit dem Komplement
$A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup \emptyset = A,\ \emptyset \subseteq A$	Operationen mit der leeren Menge
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Auflösen einer Differenz

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Mengen)

1. Sie stellen **Mengen** auf verschiedene Art und Weise dar.
2. Sie beschreiben und vergleichen **Standardmengen** und **Intervalle**.
3. Sie erklären Mengenoperationen und Mengenbeziehungen anhand von **Venn-Diagrammen**.
4. Sie unterscheiden Mengen nach ihrer **Mächtigkeit**.
5. Sie führen **Mengenoperationen** durch.
6. Sie erklären den Unterschied von Mengen und **Tupeln**.
7. Falls möglich formulieren Sie Mengenverknüpfungen unter der Verwendung geeigneter **Gesetze** um.