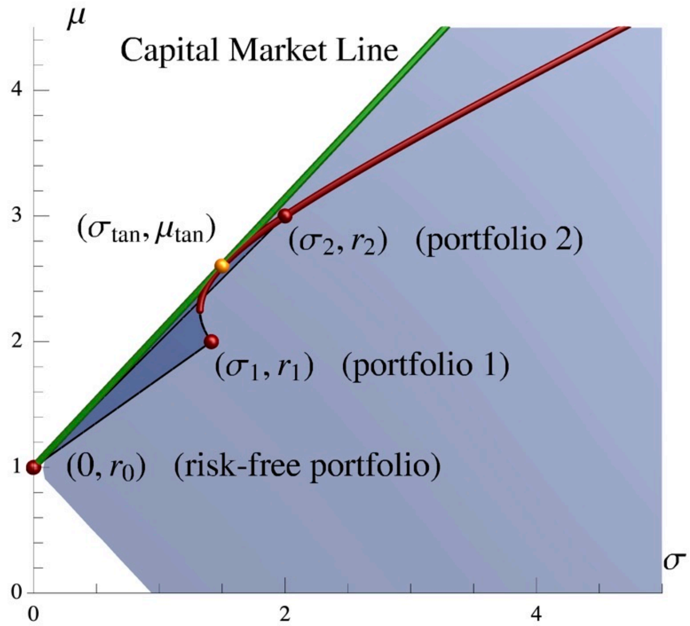
Kapitalmarktlinie (Capital Market Line)

risikofreie Anlage

$$\underbrace{\mu - r_0}_{\text{Überrendite}} = \sigma \overbrace{\sqrt{c r_0^2 - 2 b r_0 + a}}^{\text{Steigung}}$$

Risiko



Markt im Gleichgewicht:

$$x_{tan} = x_m$$

$$\frac{\mu - r_0}{\sigma} = \sqrt{c r_0^2 - 2 b r_0 + a}$$

Marktpreis für das Risiko.

Wertpapierlinie (Security Market Line) (und die "Betas")

Sei (x_0, x) irgendein Portfolio.

Beta-Faktor:

$$\beta(x_0, x) = \frac{Cov(x_0 r_0 + x^T R,\ x_m^T R)}{Var(x_m^T R)} = \frac{Cov(x^T R, x_m^T R)}{\sigma_m^2}$$

x_m – Marktportfolio

μ_m – Renditerate des Marktportfolios

σ_m – Standardabweichung ("Risiko") des Marktportfolios.

β misst die Abhängigkeit zwischen dem Portfolio (x_0, x) und dem Marktportfolio.

Skala ist so gewählt, dass

$\beta(1,0) = 0$ (risikofreie Anlage hat $\beta = 0$)

$$\beta(0, x_m) = \frac{\mathrm{Cov}(x_m^T R, x_m^T R)}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1$$

(Marktportfolio hat $\beta = 1$).

Jede einzelne Anlage i hat auch ein Beta:

$$\beta_i := \beta(0, e_i) = \frac{\mathrm{Cov}(e_i^T R, x_m^T R)}{\sigma_m^2}$$

$$= \rho_{im} \frac{\sigma_i \cancel{\sigma_m}}{\sigma_m^{\cancel{2}}} = \rho_{im} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

ρ_{im} = Korrelation zwisch Anlage i (bzw. R_i) und dem Markt x_m (bzw. $x_m^T R$).

$$\sigma_i = \sigma_i \rho_{im} + \sigma_i (1 - \rho_{im})$$

$$= \underbrace{\beta_i \sigma_m}_{\text{systematisches Risiko}} + \underbrace{\left(1 - \beta_i \frac{\sigma_m}{\sigma_i}\right) \sigma_i}_{\text{spezifische Risiko}}$$

systematisches Risiko
↳ bleibt auch auch nach Diversifikation

spezifische Risiko;
↳ kann man durch Diversifikation verschwinden lassen

Wozu ist das β gut?

→ Bepreisung von Anlagen!

→ Risiko ⟷ Gewinn

→ Anlagen mit geringer Kovarianz

mit Marktportfolio tragen besonders gut zur Diversifikation bei. Das macht sie gewissermaßen "wertvoll".

$$\beta_i = \beta(0, e_i) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\operatorname{Cov}(e_i^T R, x_m^T R)}{\sigma_m^2}$$

Im Marktgleichgewicht

$$= \frac{\operatorname{Cov}(e_i^T R, x_{tan}^T R)}{\sigma_{tan}^2}$$

$$= \frac{e_i^T \Sigma x_{tan}}{\sigma_{tan}^2}$$

Einsetzen von x_{tan}:

$$= \frac{\cancel{b - r_0 c}}{\mu_{tan} - r_0} \cdot \frac{1}{\cancel{b - r_0 c}} \cdot \left(e_i^T \cancel{\Sigma} \cdot \cancel{\Sigma^{-1}} (r - r_0 \mathbb{1})\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \beta_i = \frac{r_i - r_0}{\mu_{tan} - r_0}$$

Überrendite der Anlage i

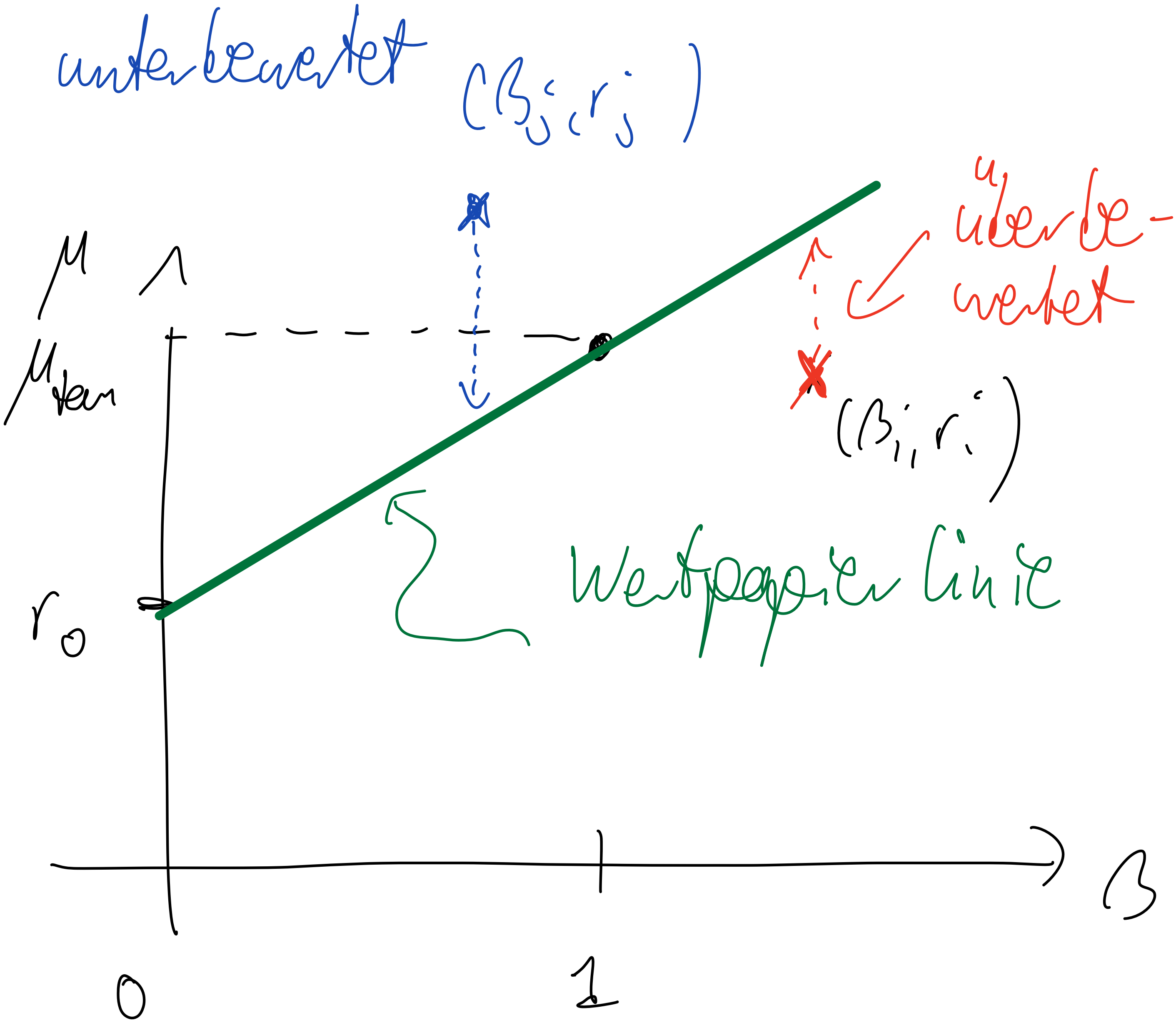
$$\boxed{\beta_i = \frac{r_i - r_0}{\mu_m - r_0}}$$

Überrendite des Marktes

$$\rightsquigarrow \boxed{r_i = r_0 + \beta_i(\mu_m - r_0)}$$

Fundamentalgleichung des Capital Asset Pricing Models.

$$r_i = \frac{\text{Nettogewinn der Anlage} - \text{Preis d. Anlage}}{\text{Kosten der Anlage}}$$



β_i – bestimmen aus historischen Daten der Anlage i und des Marktportfolio

r_i – auch aus historischen Daten schätzen

Punkte unter der Wertpapierlinie sind überbewertet:
Man Rendite erhöhen ($\hat{=}$ Preis reduzieren), um sie auf die Wertpapierlinie zu bewegen.

Punkte oberhalb der Wertpapierlinie sind unterbewertet:
Man kann die Rendite reduzieren ($\hat{=}$ Preis erhöhen), um auf die Wertpapierlinie zu kommen.

Kapitel 6 Risikomaße

Bisher haben:

$$f_1(x) = -E(x^T R)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} Var(x^T R) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x$$

$$\varrho(x^T R)$$

Damals (im Markowitz Modell) haben $Var(x^T R)$ als Risikomaß genommen;

Motivation:

- war die Tschebyschev-Ungleichung!
- man konnte gut damit rechnen!

$$Var(x^T R) = \underbrace{x^T \Sigma x}_{\text{quadratische + konvexe Funktion.}}$$

↪ einfache KKT-Bedingungen

↪ nützlich, weil es uns erlaubt, das Bestimmen der effiziente Portfolios (der Paretomenge) auf ein einziges Optimierungsproblem (eines der beiden Markowitz-Problem) zurückzuführen.

Anwendung von Risiko-Maßen

- Portfoliooptimierung

Minim. $\text{Risiko}(x^T R)$

unter der Nebenbed: $E(-x^T R) \leq -\mu$

$$x^T \mathbb{1} = 1$$

$$(x \geq 0)$$

- Versicherungen:
  ↳ Risiken in Geld (Prämien) konvertieren

- Regierungen:
  ↳ können erzwingen, dass Finanzunternehmen gewisse Sicherheiten (Eigenkapital) zurücklegen, um gewisse Risiken abzufangen

  ↳ Unternehmen werden versuchen, die Risikomaße kleinzuhalten

⇒ Regierungen sollte Maßinstrumente verscheiden, die die Marktstabilität verbessern, wenn alle sie verwend.
z.B. Risikomaße, die Diversifikation fördern.

6.1 Kohärente Risikomaße

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,
$\mathcal{X} := L^p((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{R})$ für $p \in [1, \infty]$.

$$\left(X \in \mathcal{X}, \quad \|X\|_{L^p} := \sqrt[p]{\int |X(\omega)|^p \, dP(\omega)} \text{ ist eine Norm.} \right)$$

Ein Risikomaß (oder Risikofunktional) ist eine Funktion

$$\mathcal{R} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Folgende interessante Eigenschaften können Risikomaße haben:

1.) „Normierung“: $\mathcal{R}(0) = 0$.
Risiko der Nullfunktion sei 0.
Plausibel, denn Nullzufallsvariablen kann es keine Verluste geben.

2.) "Translationsäquivarianz":

Sei $X \in \mathcal{X}$ und $c \in \mathbb{R}$.
Dann soll gelten $\rho(X+c) = \rho(X) - c$

Idee dahinter: $X(\omega) < 0$ soll "schlecht" sein, d.h. wir machen Verlust.
Wenn man Geld $c > 0$ zuschießt, wird der Verlust ausgeglichen
$\leadsto$ Risiko <u>sinkt</u>:

Weitere Idee:

$$\rho(X + \underbrace{\rho(X)}) = \rho(X) - \rho(X) = 0$$

$\rho(X)$ sagt mir, wieviel Geld nötig ist, um das Risiko auf 0 zu bringen.

3.) Monotonie:

Seien $X, Y \in \mathcal{X}$ s.d. $X \leq Y$ P-fast überall.
(d.h. $U := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > Y(\omega)\}$ ist eine eine Nullmenge, d.h. $P(U) = 0$)
Dann soll $\rho(X) \geq \rho(Y)$ gelten.

(Plausibel: Niedrigere Gewinne bedeuten höheres Risiko).

4.) Positive Homogenität:

Für $X \in \mathcal{X}$ und für alle $\lambda \geq 0$:

$$\varrho(\lambda X) = \lambda \cdot \varrho(X)$$

(z.B. $\|\cdot\|_{2,P} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ist positiv homogen, aber nicht homogen.)

5.) Subadditivität:

Für $X, Y \in \mathcal{X}$ soll stets gelten:

$$\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$$

(z.B. $\|\cdot\|_{2,P}$ ist subadditiv, aber nicht additiv)

Motivation: Subadditive Risikomaße begünstigen Diversifikation

6.) Konvexität:

Für $X, Y \in \mathcal{X}$ und $\theta \in [0,1]$:

$$\mathcal{R}((1-\theta)X + \theta Y) \leq (1-\theta)\mathcal{R}(X) + \theta \mathcal{R}(Y)$$

$\rightsquigarrow \mathcal{R}(x^T R)$

$$= \mathcal{R}\left(\sum_i x_i R_i\right) \leq \sum_i x_i \mathcal{R}(R_i)$$

$\rightsquigarrow$ Motivation auch hier: Konvexität besagt, das Diversifikation vorteilhaft ist.

7.) Relevanz:

Für $X \in \mathcal{X}$ mit $X \leq 0$ P-fast immer, aber $X \neq 0$ (d.h. $X < 0$ auf einer Menge positiver Wahrscheinlichkeit), dann sei $\mathcal{R}(X) > 0$.

"Wenn ich mit X nur Verluste machen kann, dann muss $\mathcal{R}$ mich davor warnen können."

Definition

Ein Risikomaß $\varrho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ nennt man kohärent, genau dann, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:

- translationsäquivariant
- monoton
- positiv homogen
- subadditiv.

Übung: Sei $\varrho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ positiv homogen. Dann gilt:

ϱ ist subadditiv $\iff$ ϱ ist konvex.