Kombinatorik

Kombinatorik: Überblick

Name	Menge der Elemente = {A,B,C}, Anzahl gewählter Elemente: k =2 (erst ab Variation)	Formel	Alle Elemente dabei?	Reihenfolge beachten ?	Treten Element mehrfach auf?
Permutation ohne Wiederholung	[A,B,C] [A,C,B] [B,A,C] [B,C,A] [C,A,B] [C,B,A]	$n!$	Ja	Ja	Nein
Permutation mit Wiederholung	A,A,B: [A,A,B] [A,B,A] [B,A,A]	$\frac{n!}{n_1! + n_2! + \cdots}$	Ja	Ja	Ja
Variation ohne Wiederholung	[A,B] [A,C] [B,C] [B,A] [C,A] [C,B]	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Nein	Ja	Nein
Variation mit Wiederholung	[A,A] [B,B] [C,C] [A,B] [A,C] [B,A] [B,C] [C,A] [C,B]	n^k	Nein	Ja	Ja
Kombination ohne Wiederholung	[A,B] [A,C] [B,C]	$\binom{n}{k}$	Nein	Nein	Nein
Kombination mit Wiederholung	[A,A] [B,B] [C,C] [A,B] [A,C] [B,C]	$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! * k!}$	Nein	Nein	Ja

Übung: Kombinatorik

Wie viel „Ziffern“ mit allen 5 Zahlen können Sie aus den folgenden 5 Zahlen bilden?

2 1 2 1 2

Permutation mit Wiederholung: 10 (5!/2!*3!)

Lösung: 1 0

Wie viel „Worte“ kann man bilden?

A B C D E

(Buchstaben streichen, wenn er bereits verwendet wurde. Wörter müssen keinen Sinn ergeben und Buchstaben kommen nicht doppelt vor.)

_ _

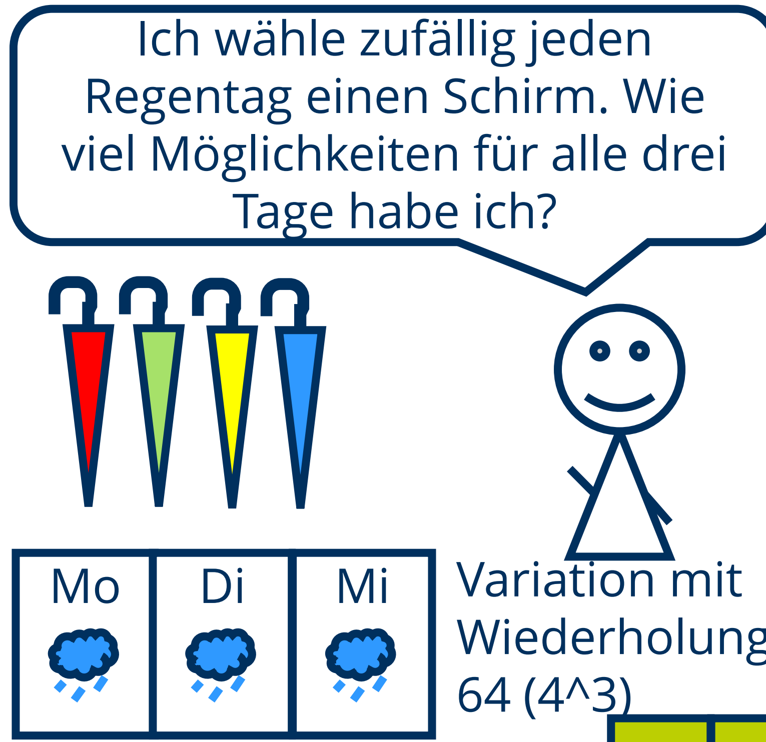
Variation ohne Wiederholung: 20 (5!/3!)

Lösung: 2 0

Übung: Kombinatorik

Kombination ohne Wiederholung: 45 (10 über 2)

Lösung: 4 5



Variation mit Wiederholung: 64 (4^3)

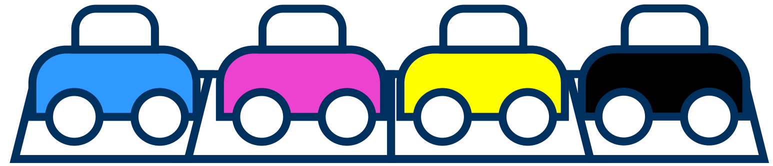
Lösung: 6 4

Übung: Kombinatorik

Kombination mit Wiederholung: 20 (6!/3!*3!)

Lösung: | 2 | 0 |

Eine Möglichkeit die Autos anzuordnen sieht so aus. Wie viele gibt es noch?



Permutation ohne Wiederholung: 24 (4!)

Lösung: | 2 | 4 |

Wahrscheinlichkeit Grundlagen

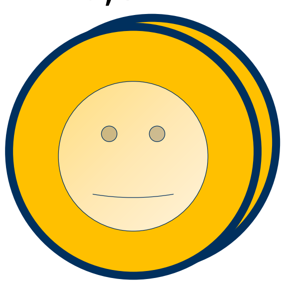
Der Zufall, Zufallsexperiment, Ereignis

Ein Zufallsexperiment: bei Wiederholung des Experiments erhält man immer die ähnliche Ergebnisse. Man kennt die möglichen Ergebnisse, aber genaue Vorhersage ist unmöglich.

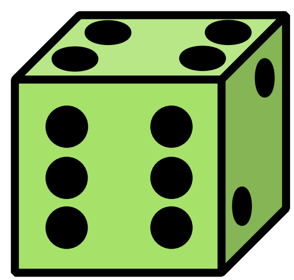
Wie wahrscheinlich ist a.) Kopf bei der Münze, b.) eine 6 beim Würfel und c.) eine 0 beim Roulette?

Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines konkreten ***Ereignisses*** *(Ergebnis)*:

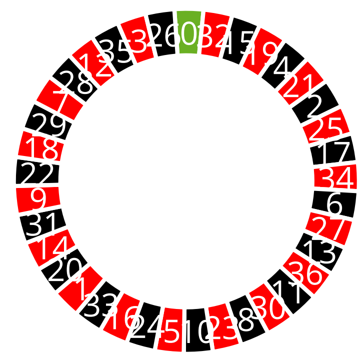
0,5 / ½



1/6



1/37



Wie lautet die Menge aller Ereignisse:

Kopf / Zahl

1, 2, 3, 4, 5, 6

0, 1, 2, 3, 4, 5, ... 36

Quiz über Glücksspiele

		Ja	Nein
1	Im Lotto ist die Zahlenfolge 1,2,3,4,5,6 genauso wahrscheinlicher wie Reihenfolge 6,12,23,34,35,47	X	
2	Man kann vorhersagen welche Zahl beim Roulett als nächstes kommt.		X
3	Wer 10 Jahre erfolglos Lotto spielt wird demnächst bestimmt Glück haben.		X
4	Die Wahrscheinlichkeit, ob ich eine Klausur bestehe oder nicht, ob ich beim Fußball ein Tor schieße oder nicht oder ob ich einen Job bekomme oder nicht beträgt nie genau 50:50.	X	
5	Seltene Ereignisse – wie besonders viel Nüsse in einer Tüte mit Nüssen – treten nur auf, wenn irgendwas besonderes geschehen ist. Normal ist das nicht.		X
6	Wenn ich beim Würfeln drei Sechsen hintereinander würfle, wird der nächste Wurf sicher auch eine Sechs.		X

Von Kombinatorik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung
Laplacescher Wahrscheinlichkeitsregel

$$Wahrscheinlichkeit = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Fälle} = \boldsymbol{P}$$

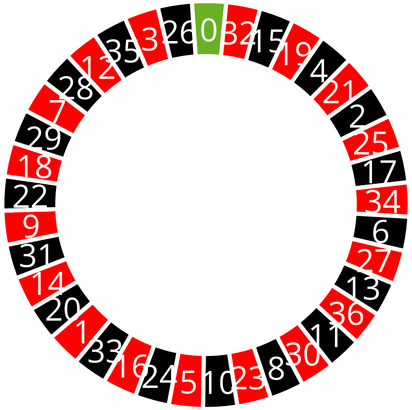
Laplacescher Wahrscheinlichkeitsregel
Wenn alle Einzelergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeit (P) beim Roulett

a. P für Zahl 0
b. P für rote Zahlen

Lösung

a. $P = \frac{1}{37}$ oder 0,027 ≙ **2,7 %**
b. $P = \frac{18}{37}$



Gegenwahrscheinlichkeit Ā: I

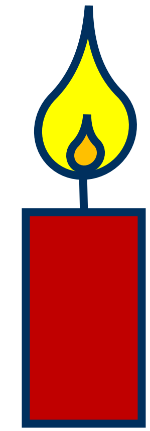
Ausgangproblem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, keine Sechs zu würfeln?

A = Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln = 1/6

$$\boldsymbol{\bar{A} = 1 - A} = 1 - \frac{1}{6}$$

Venn-Diagramm

Gegenwahrscheinlichkeit Ā: II



Ausgangsproblem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Umgekehrte Formulierung des Ausgangsproblems: Wahrscheinlichkeit das eine zwei Personen *nicht* am gleichen Tag Geburtstag haben:

Erste Person hat an einem Tag von 365 Tagen Geburtstag 365/365 = 1

Die zweite Person muss nun an einem der restlichen 36**4** Tage Geburtstag haben 364/365

Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse 1 = P(A) + P(Ā)

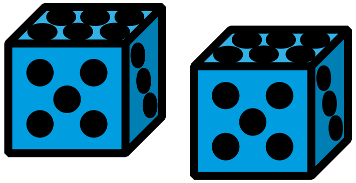
Wahrscheinlichkeit A: P(A) = $\frac{365}{365} * \frac{364}{365} = 0{,}99$ ist die Wahrscheinlich beide nicht am gleichen Tag Geburtstag haben.

Einzelwahr-scheinlichkeit für 1. Person

Einzelwahr-scheinlichkeit für 2. Person

Gegenwahrscheinlichkeit Ā: P(Ā) = 1-A. 1-0,99 = 0,0027 ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide am gleichen Tag Geburtstag haben.

Übungen Pfadregeln



Für folgende Aufgaben zeichnen Sie das Baumdiagram auf.

1. Wahrscheinlichkeit bei zwei Mal würfeln für zwei Sechsen hintereinander?

2. Wahrscheinlichkeit bei zweimal Würfeln für eine Sechs und eine Eins?

3. Stellen Sie ihren Nachbarn eine weiter Aufgabe.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

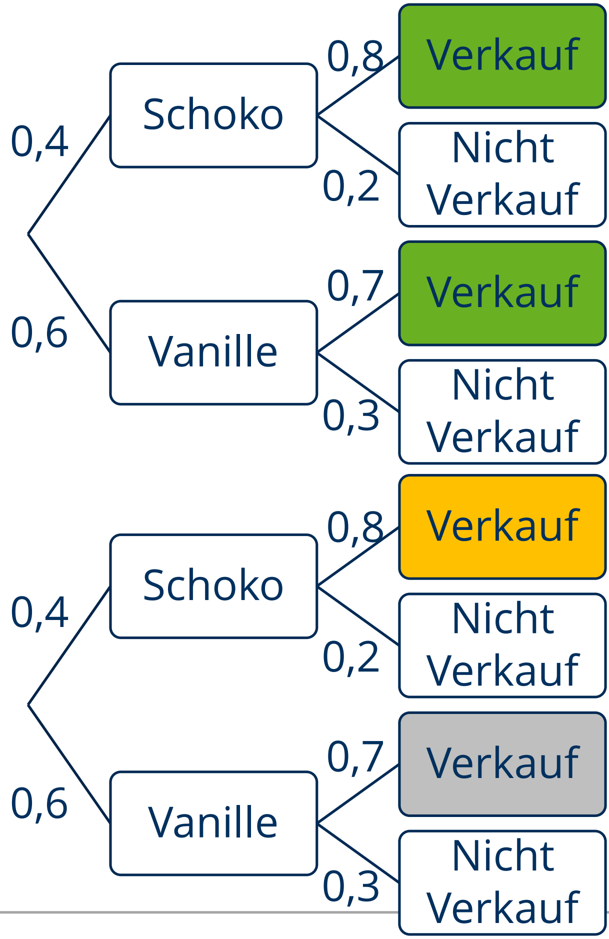
Bedinge Wahrscheinlichkeiten: Als Textaufgabe

		Deutsch-note			
		X	**Y**	**Z**	
Lateinnote	I	1	2	3	6
	II	6	5	4	15
	III	7	8	9	24
		14	15	16	45

Eine Textaufgabe könnte lauten:
Von 45 Schülern haben 24 Schüler in Latein eine III.
Nur ein Schüler hat in Latein ein I und in Deutsch ein X.
13 weitere Schüler haben in Deutsch ein X.
→14 Schüler haben ein X (13+1)
Insgesamt haben 6 Schüler eine I in Latein.
Von allen mit einer I haben 1/3 ein Y. → 1/3 von 6 = 2.
Die letzte Zahl in der erste Reihe ist die 3.
1/9 aller Schülern haben in Deutsch und Latein mittlere Ergebnisse.
Mittlere Ergebnisse = II und Y →1/9 von 45 = 5.
15 Schüler haben eine II.
In der Gruppe der Schüler die ein Z geschrieben haben, ist nur ein Schüler mehr als in Y. → (45 -14)/2 → 15,5 da nur ganze Zahlen möglich sind → 15 und 16.
Und so weiter.

Vergleich Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

Szenario: Eisladen, hat Anteil von 40 Schokoeis und Rest Vanilleeis.
Vom Schokoeis wir 80 % verkauft. Vom Vanilleeis 70 %.



Totale Wahrscheinlichkeit:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt (total) für den verkaufte Eis?

1. + 2. Pfadregel:

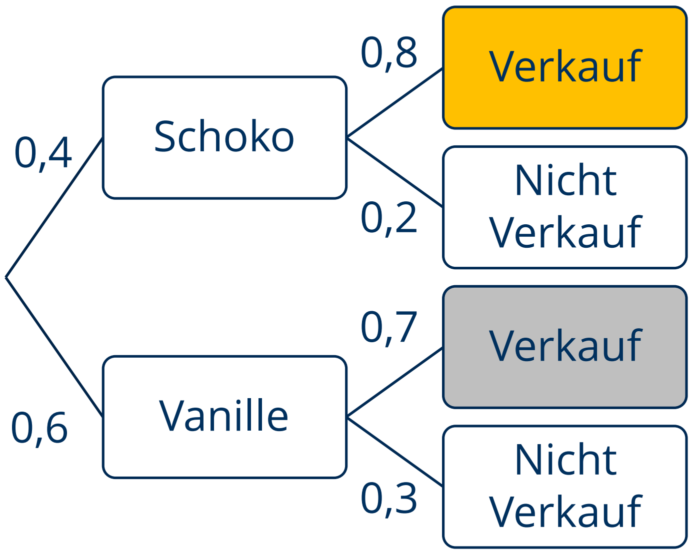
P(Verkauf):0,8*0,4 + 0,7*0,6 = **0,74**

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein verkauftes Eis, dass es Schokolade ist?

.... *(nächste Folie)*

Bedingte Wahrscheinlichkeit weiter rechnen



$$P(Schoko \cap Verkauf) = 0{,}4 * 0{,}8 = 0{,}32$$

$$P(Schoko \cap \overline{Verkauf}) = 0{,}4 * 0{,}2 = 0{,}08$$

$$P(Vanille \cap Verkauf) = 0{,}6 * 0{,}7 = 0{,}42$$

$$P(Vanille \cap \overline{Verkauf}) = 0{,}6 * 0{,}3 = 0{,}18$$

4-Felder Tafel	**Schoko**	**Vanille**	**Zeilen %**
Verkauft	**0,32**	**0,42**	**0,74**
Nicht verkauft	**0,08**	**0,18**	**0,26**
Spalten %	**0,40**	**0,60**	**1**

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(Schoko|Verkauft) = \frac{P(Schoko \cap Verkauf)}{P(Verkauf)}$$

$$= \frac{0{,}32}{0{,}74} = \ \ldots$$

BERUFSAKADEMIE SACHSEN
STAATLICHE STUDIENAKADEMIE
RIESA
UNIVERSITY OF COOPERATIVE EDUCATION

Bayesianische Statistik

Können Menschen in Baysianische Statistik denken?

Viele Studien weisen darauf hin, das Bayesianische Statistik für Menschen fremd bleibt.*

Es gibt verschiedene Wege Baysianische Statistik zu lernen:

- Vorgabe von verschiedenen Fällen. Die Lernenden geben Schätzungen ab. Dann erhalten sie die richtigen Ergebnisse.

- Lernen der Gesetz der großen Zahl.

Kann man das damit das Denken in Baysianischer Statistik erfolgreich lehren/lernen?

Es gibt einige Versuche Baysesianisches Denken menschen beizubringen, diese Studien haben aber wenig Erfolg.*

* Sedlmeier, Peter, Gigerenzer, Gerd Teaching (2001): Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. Journal of Experimental Psychology: General Vol. 130, No. 3. 380-400

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung aus Text Informationen ableiten

		Kreditrückzahlung	
		Zahlen nicht zurück	Zahlen zurück
		10	90
Unternehmens-größe	Hohes Risiko	80 % = 8	20 % = 18
	Niedrig Risiko	20 % = 2	80 % = 72

Sie arbeiten in einer Bank. Anhand der Daten der letzten 10 Jahre wissen Sie, dass 10 % der bisherigen Kreditnehmer ihren Kredit nicht zurückzahlen. Sie haben ein neues Rechenmodell, dass Kunden in Hoch- und Niedrig-Risikogruppen klassifiziert. Von den Hochrisikokreditnehmer wurden 80 % als Nicht-Zurückzahlenden klassifiziert und 20 % als Rückzahlende.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit das ein Kreditnehmer, der als hoch Risiko Kreditnehmer eingestuft wird, seinen Kredit nicht zurück zahlt?

Wie gut eignet sich das Rechenmodell als Prognose Instrument?

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung Bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen

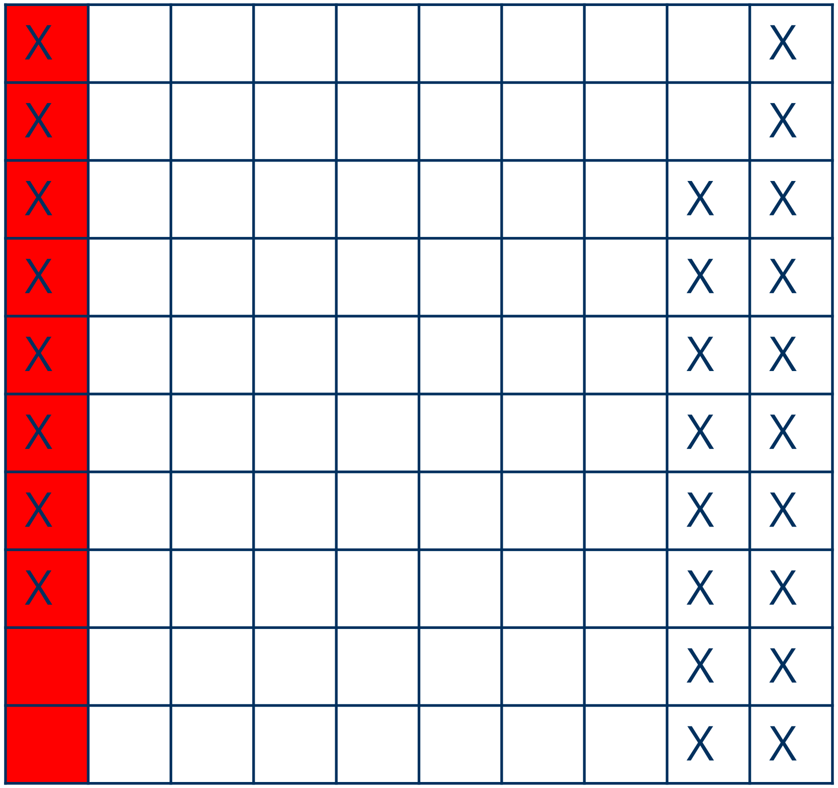
		Kreditrückzahlung			
		Zahlen nicht zurück	Zahlen zurück	Summe	Davon nicht zurück zahlen
		10	90		
Unternehmens-größe	Hohes Risiko	80 % = 8	20 % = 18	26	Ca. 31 %
	Niedrig Risiko	20 % = 2	80 % = 72	74	Ca 3 %

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung
Veranschaulichung

Absolute Zahl: 100

Zahlen nicht 10		Zahlen 90	
Hoch Risiko 8	Niedrig Risiko 2	Hoch Risiko 18	Niedrig Risiko 72

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung Veranschaulichung



- Hochrisiko Kreditnehmer
- Hochrisiko Kreditnehmer, die nicht zurückzahlen
- Niedrigrisiko Kreditnehmer
- Niedrigrisiko Kreditnehmer, die nicht zurückzahlen

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung Krankheit

Angenommen, bei Ihnen wurde mit einem Test eine schwere Krankheit diagnostiziert. Nun wissen Sie, dass diese Krankheit selten ist. Sie tritt bei 1000 Menschen nur einmal auf. Außerdem wissen Sie, dass der Test nur zu 99 Prozent richtige Ergebnisse liefert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie krank sind?

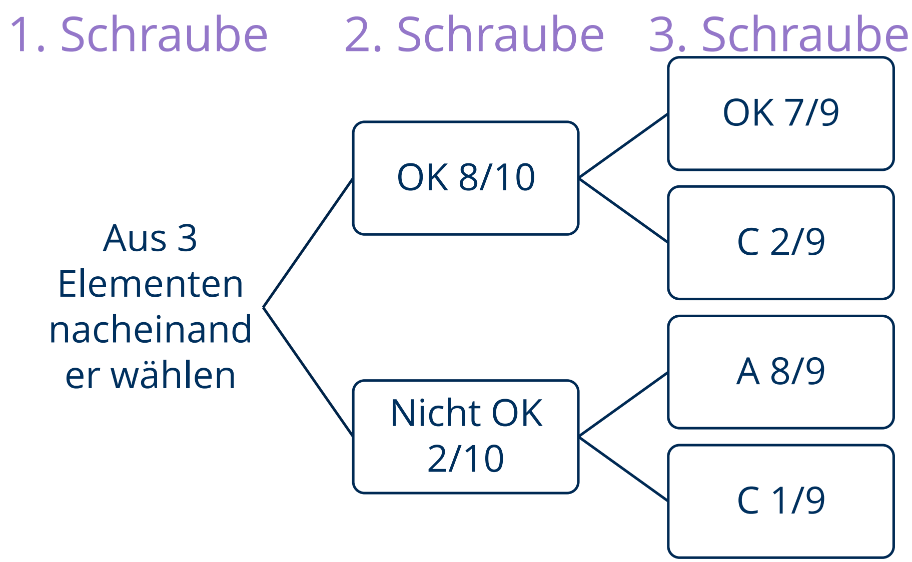
		Wirklichkeit			
		Krank 1 Person	Gesund 999 Personen	Summe	Davon krank
Testergebnis	„Krank"	99 % als krank erkannt = 0,99 Personen	1 % falsch als krank eingestuft = 9,99 Personen	10,98 Personen	9,0163 % wirklich krank
	„Gesund"	1 % falsch als gesund eingestuft = 0,01 Personen	99 % als gesund erkannt = 989,01 Personen	989,02 Personen	0,0010111 wirklich krank

Diskrete Verteilung und Wahrscheinlichkeiten

Mehrere Ereignisse hintereinander mit Wiederholung/Zurücklegen

Beispiel: Von 10 Schrauben haben zwei einen Fehler.

Wenn man 2 Schrauben wählt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle ok sind?



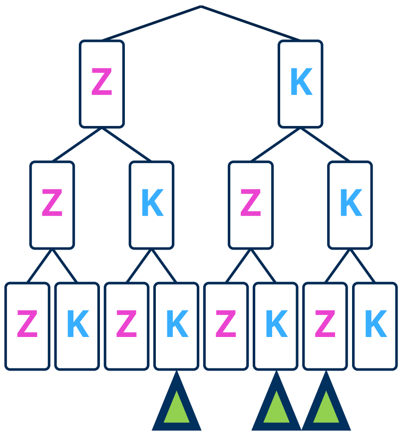
= 8/10 * 7/9 = 0,623
= 8/10 * 2/9 = 0,178
= 2/10 * 8/9 = 0,178
= 2/10 * 1/9 = 0,023

Alle vier P zusammen = 1

Die Darstellung ist ungeeignet für komplexere Probleme. Daher verwendet man die **Binominalverteilung** (wenn die Wahrscheinlichkeiten sich nicht in jedem Schritt ändern.) oder die hypergeometrische Verteilung.

Übersicht Unterscheide von Mindestens, Maximal und Genau

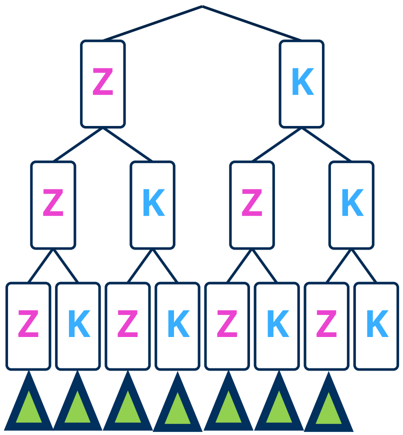
Genau 2 x Kopf



½*½*½ + ½*½*½ + ½*½*½ = 0,375

Oder Binominalverteilung

Maximal 2 x Kopf



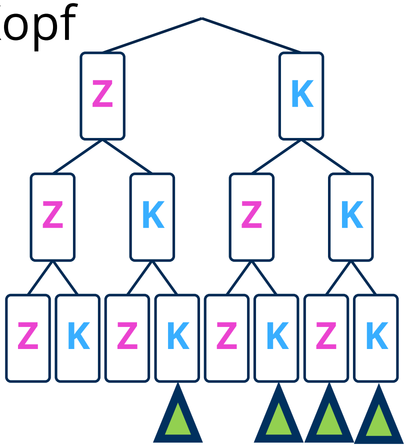
(½*½*½) * 7

= 0,875

Oder:

Aufsummierung der Einzel-Ps bis 2

Mindestens 2 x Kopf



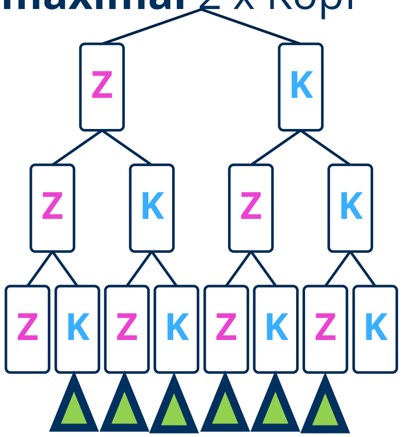
½*½*½ + ½*½*½ + ½*½*½ + ½*½*½

= 0,5

Oder Gegenwahrs.

100 % minus alle Ps bis genau 1x abziehen.

Mindestens 1 **maximal** 2 x Kopf



(½*½*½) * 6

=0,75

Oder:

(P für maximal 2) **–** **(**P für „maximal“ 0).

Wahrscheinlichkeiten Übung

Beispiel: 3 Kugeln (1,2,3) mit Zurücklegen. Alle Fälle: $3^3 = 27$

Maximal / Genau eine 1:

1XX = 4 Möglichkeiten
X1X = 4 Möglichkeiten
XX1 = 4 Möglichkeiten
4*3 = 12 -> 12/27 oder (1/3*2/3*2/3)*3

Mindestens eine 1:

```
1XX  =  4
X1X  =  4
XX1  =  4
11X  =  2
1X1  =  2
X11  =  2
111  =  1
summe= 19
```

19/27

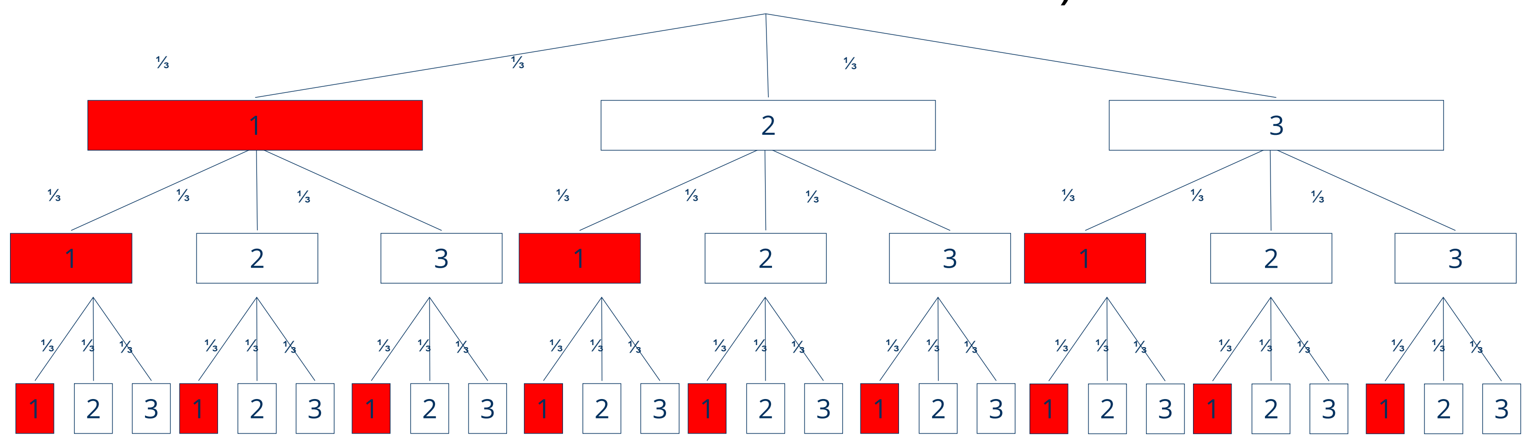
Keine 1:

$2^2 * 2^2 * 2^2 = 8 \rightarrow 8/27$ oder 2/3*2/3*2/3 (Gegenwahrscheinlichkeit)

Drei Mal 1:

= ⅓* ⅓* ⅓ oder 1/27

(einfache Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten)



Binominalverteilung: Aufgabe

Ein Schütze hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 50 %. Er schießt 10 mal.

a) Wie lautet der Erwartungswert?

b) Wie wahrscheinlich trifft er genau so oft wie der Erwartungswert (a)?

c) Wie wahrscheinlich trifft er **maximal** 2 mal?

d) Wie wahrscheinlich trifft er **mindesten**s 3 mal?

Lösung

a) EX = n*p = 5

b) $\binom{n}{k} * \ p^k * (1-p)^{n-k}$

$= \binom{10}{5} * 0{,}5^5 * (1-0{,}5)^{10-5}$

$= 0{,}246$

c) Wahrscheinlichkeit für 1 mal und 2 mal errechnen (0,10 und 0,044) und summieren = 0,054

d) Gegenwahrscheinlichkeit von c: 1-0,054 = 9,95

Hypergeometrische Verteilung: Übung I

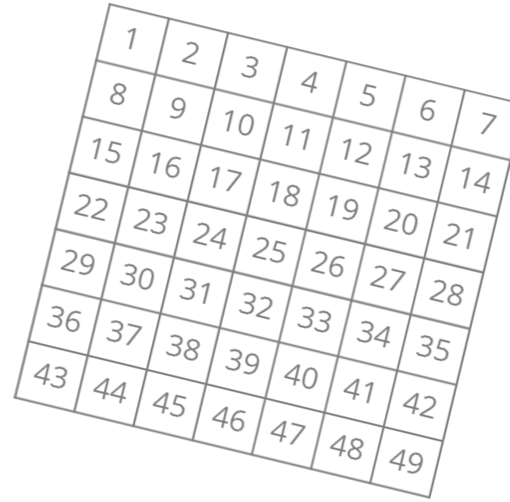
Eine Firma produziert Stifte und behauptet, dass 3 Prozent der Stifte defekt sind. Sie kaufen eine Stichprobe von 4 und stellen fest, dass 1 Stift defekt ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, unter 4 genau einen defekten zu finden? Glauben Sie dem Garantiversprechen der Firma?

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N = , M = , n = , k =

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{100-3}{4-1}}{\binom{100}{4}} = 0{,}113 \rightarrow 11{,}3\ \%$$

Hypergeometrische Verteilung Übung II



Übung: Berrechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 0,1,2,3,4, 5 und 6 richtige beim Lotto mit 6 aus 49 Zahlen.

Lösung

0: $\frac{\binom{6}{0} * \binom{49-6}{6-0}}{\binom{49}{6}}$ = 43,6 %

1: $\frac{\binom{6}{1} * \binom{49-6}{6-1}}{\binom{49}{6}}$ = 41,3 %

2: $\frac{\binom{6}{2} * \binom{49-6}{6-2}}{\binom{49}{6}}$ = 13,2 %

3: $\frac{\binom{6}{3} * \binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}}$ = 1,76 %

4: $\frac{\binom{6}{4} * \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}}$ = 0,097 %

5: $\frac{\binom{6}{5} * \binom{49-6}{6-5}}{\binom{49}{6}}$ = 0,00184 %

6: $\frac{\binom{6}{6} * \binom{49-6}{6-6}}{\binom{49}{6}}$ = 0,00000715%

Formel: Hypergeometrische Verteilung

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Übersicht: Wahrscheinlichkeitsmodelle

Wonach ist gefragt?	Diskrete Verteilung	Stetige Verteilung
P für bestimmte Anzahl?	**Binominialverteilung** **Hypergeometrische Verteilung**	Poissonverteilung (Annäherung für Binominalverteilung bei großen Stichproben und kleiner Wahrscheinlichkeit; auch für seltene Ereignisse)
Wann etwas das erste Mal auftritt.	Geometrische Verteilung	Exponentialverteilung