Hausaufgabe Nr.12

Dennis P. Kliem, Mtk-Nr.: 56856

13.12.2021

Aufgabe 20

Beweis kleine Lösungsformel

Ziel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Ausgangsgleichung: $x^2 + px + q = 0$

$$\begin{aligned}
& & x^2 + px + q &= 0 & &\mid (x + \tfrac{p}{2})^2 = x^2 + px + \tfrac{p^2}{4} \\
&\iff & (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q &= 0 & &\mid + \tfrac{p^2}{4} - q \\
&\iff & (x + \tfrac{p}{2})^2 &= \tfrac{p^2}{4} - q & &\mid \sqrt{()} \\
&\iff & x_{1,2} + \tfrac{p}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} & &\mid + \tfrac{p}{2} \\
&\iff & x_{1,2} &= -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} & &
\end{aligned}$$

$\mathbb{QED}$.

Aufgabe 21a

Der Binomische Lehrsatz beschreibt die Art und Weise, eine ganzzahlige Potenz einer zweigliedrigen (binomischen) Summe aufzulösen. Er lautet:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Somit lauten die binomischen Formeln zweiten, dritten und vierten Grades ($n = 2$, $n = 3$, $n = 4$):

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 21b

Zu beweisen ist:

$$
\begin{gathered}
x = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{D}} \text{ mit}\\
D = (\tfrac{q}{2})^2 + (\tfrac{p}{3})^3 = \tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27} \text{ und}\\
p; q \in \mathbb{R}\\
\text{Sei eine Lösung für:}\\
x^3 + px + q = 0\\
\text{Beweis durch Einsetzen:}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 &= \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\right)^3\\
&= -\frac{q}{2}+\sqrt{D}+3\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{D}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}+\\
&\qquad 3\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{D}\right)^2}-\frac{q}{2}-\sqrt{D}\\
&= -q+3\cdot\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{D}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{D}\right)^2}\right)\\
&= -q+3\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{D}\right)\cdot\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{D}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\right)\\
&= -q+3\cdot\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-D}\cdot x\\
&= -q+3\cdot\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\cdot x\\
&= -q+3\cdot\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}\cdot x\\
&= -q-3\cdot\frac{p}{3}\cdot x\\
&= -q-px
\end{aligned}
$$

Dies wiederum lässt sich in die Ausgangsgleichung zurückumformen:

$$\begin{aligned} x^3 &= -q - px \\ 0 &= x^3 + px + q \end{aligned}$$

$$\mathbb{QED}.$$

Somit handelt es sich tatsächlich um eine Lösung der Gleichung.