1. Hausaufgabe Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Jakob Lorenz - Matrikel-Nr.: 740654

26.10.2022

Aufgabe 1

a)

A	B	$A \wedge B$	$\neg((\neg A) \vee (\neg B))$	$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg((\neg A) \vee (\neg B))$
W	W	W	W	W
F	W	F	F	W
W	F	F	F	W
F	F	F	F	W

b)

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
W	W	W	W	W
F	W	W	F	W
W	F	F	F	W
F	F	W	F	W

c)

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg B$	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
W	W	W	F	W
F	W	W	F	W
W	F	F	F	W
F	F	W	W	W

Aufgabe 2

a)

$A \dot{\vee} B \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$

$A \bar{\vee} B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$

$A \bar{\wedge} B \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

b) $A \dot{\vee} B \leftrightarrow \neg((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg(A \wedge B))$

c)

$\neg A \leftrightarrow A \bar{\wedge} A$

$A \wedge B \leftrightarrow (A \bar{\wedge} B) \bar{\wedge} (A \bar{\wedge} B)$

d)

$\neg A \leftrightarrow A \bar{\vee} A$

$A \wedge B \leftrightarrow ((A \bar{\vee} B) \bar{\vee} B) \bar{\vee} (A \bar{\vee} A)$

Aufgabe 3

$A :=$ „Arthur sagt nicht die Wahrheit."
$B :=$ „Bernd sagt nicht die Wahrheit."
$C :=$ „Christiane sagt nicht die Wahrheit."

Aus den Aussagen A,B und C und den Informationen aus der Aufgabenstellung ergibt sich dann:

(1) $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow C)$

(2) $B \leftrightarrow \neg C$

(3) $C \leftrightarrow \neg A$

Daraus kann man dann Folgern:

(2),(3) $\rightarrow$ (4) $B \leftrightarrow \neg(\neg A) \leftrightarrow A$

(1),(4) $\rightarrow$ (5) $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow (\neg C))$

(1),(3) $\rightarrow$ (6) $A \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow (\neg(\neg A))) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow A) \leftrightarrow$ Falsch

(3),(6) $\rightarrow$ (7) $C \leftrightarrow$ Wahr

(2),(7) $\rightarrow B \leftrightarrow Falsch$

Eine mögliche Lösung ist:
Arthur sagt die Wahrheit, Bernd sagt die Wahrheit und Christian lügt.

Aufgabe 4

a)

Behauptung: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Beweis:

$x \in f(A \cup B) \Leftrightarrow x \in \{f(x) : x \in A \cup B\}$

$\Leftrightarrow x \in \{f(x) : x \in A \vee x \in B\}$

$\Leftrightarrow x \in \{f(x) : x \in A\} \cup \{f(x) : x \in B\}$

$\Leftrightarrow x \in f(A) \cup f(B)$

$\Rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

q.e.d.

b)

Aufgabe 5

a)

Behauptung: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Beweis:

$x \in f^{-1}(A \cup B) \overset{Def}{\Leftrightarrow} x \in \{x \in V : f(x) \in A \cup B\}$

$\Leftrightarrow x \in \{x \in V : f(x) \in A \vee f(x) \in B\}$

$\Leftrightarrow x \in \{x \in V : f(x) \in A\} \cup \{x \in V : f(x) \in B\}$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

q.e.d.

b)

Aufgabe 6

Wir definieren $|A| := n$ und $|B| := m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

a)

Bei einer injektiven Abbildung darf die Zielmenge nicht weniger mächtig sein als die Definitionsmenge sein. Das kann man einfach nach dem Schubfachprinzip beweisen:
Wenn man n Objekte auf m Schubladen verteilt und $n \leq m$ gilt, dann ist in jeder Schublade höchstens ein Objekt, was einer injektiven Abbildung entspricht.

$\Rightarrow |A| \leq |B|$

q.e.d.

b)

Bei einer surjektiven Abbildung darf die Definitionsmenge nicht weniger mächtig sein als die Zielmenge sein. Das kann man einfach nach dem Schubfachprinzip beweisen:
Wenn man n Objekte auf m Schubladen verteilt und $n \geq m$ gilt, dann ist in jeder Schublade mindestens ein Objekt, was einer surjektiven Abbildung entspricht.

$\Rightarrow |A| \geq |B|$

q.e.d.

c)

Bei einer bijektiven Abbildung muss die Definitionsmenge genauso mächtig sein wie die Zielmenge. Das kann man einfach nach dem Schubfachprinzip beweisen:
Wenn man n Objekte auf m Schubladen verteilt und $n = m$ gilt, dann ist in jeder Schublade genau ein Objekt, was einer bijektiven Abbildung entspricht.

$\Rightarrow |A| = |B|$

q.e.d.

d)

Bei einer surjektiven, aber nicht injektiven Abbildung muss die Definitionsmenge genauso mächtig sein wie die Zielmenge. Das kann man einfach nach dem Schubfachprinzip beweisen:
Wenn man n Objekte auf m Schubladen verteilt und $n > m$ gilt, dann ist in jeder Schublade mindestens ein Objekt, was schon mal für eine surjektive Abbildung spricht und da in mindestens einer Schublade mehr als ein Objekt ist, kann die Abbildung nicht injektiv sein.

$\Rightarrow |A| > |B|$

q.e.d.

e)

Bei einer injektiven, aber nicht surjektiven Abbildung muss die Definitionsmenge genauso mächtig sein wie die Zielmenge. Das kann man einfach nach dem Schubfachprinzip beweisen:
Wenn man n Objekte auf m Schubladen verteilt und $n < m$ gilt, dann ist in jeder Schublade höchstens ein Objekt, was schon mal für eine injektive Abbildung spricht und da in mindestens einer Schublade kein Objekt ist, kann die Abbildung nicht surjektiv sein.

$\Rightarrow |A| < |B|$

q.e.d.