Prof. Dr. Martin KELLER-RESSEL | TU Dresden
Dr. Robert BAUMGARTH | WS 2024-2025

Mathematik 1 – P-Aufgabe n° 01

Algebraische und analytische Grundlagen

Aufgabe 1

(a) Gegeben sei eine reelle Zahl x. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass $x^2 \geq 4$ gilt?

(a1) Es gilt $x \geq 2$.

(a2) Es gilt $|x| \geq 2$.

(a3) Es gilt $2x^2 > 5$.

(b) Gegeben sei ein Viereck $ABCD$. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass das Viereck ein Rechteck ist?

(b1) Die jeweils gegenüber liegenden Seiten des Vierecks sind zueinander parallel.

(b2) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang.

(b3) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang und alle Innenwinkel sind rechte Winkel.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

Leiten Sie für $\varphi \in (-\pi, \pi]$ das Additionstheorem her für die Ausdrücke

$$\cos(5\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(5\varphi).$$

Hinweis: Betrachten Sie die trigonometrische Polarform von z^5 für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und verwenden Sie, dass $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (Komplexe Zahlen)

Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen, und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Polarform an:

(a) $z = \frac{1+2i}{2-i}$,

(b) $z = (1-i)^4$.

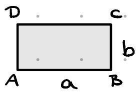
Aufgabe 1 $\quad x^2 \geq 4 \quad = \quad |x| \geq 2$

a1) $x \geq 2$ hinreichende Bedingung

a2) $|x| \geq 2$ notwendige Bedingung und hinreichende Bedingung

a3) $2x^2 > 5$ hinreichende Bedingung

$\hookrightarrow x^2 > \frac{5}{2} \qquad \frac{5}{2} < 4$

b) Viereck ABCD Rechteck 

b1) gegenüberliegend parallel – notwendig

b2) alle Seiten gleich Lang – nicht notwendig und nicht hinreichend (Aussage für Quadrat)

b3) alle Seiten gleich lang & innenwinkel ⊾ – hinreichend (Quadrat = spezielles Rechteck)

Aufgabe 2

$\varphi \in (-\pi, \pi]$ Additionstheorem

$z = a + bi \qquad (e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2})$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \longrightarrow e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} = e^{ia} \cdot e^{ib}$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \cdot \sin(a+b)$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a)) + (\cos(b) + i\sin(b))$$

$$= (\cos(a) \cdot \cos(b)) - (\sin(a) \cdot \sin(b)) + i(\sin(a) \cdot \sin(b) + \cos(a) \cdot \sin(b))$$

$\sin(5\varphi) \qquad \cos 5(\varphi) \qquad |z| = 1 \qquad z^5$

$z^5 = (e^{i\varphi})^5 = e^{i5\varphi} \qquad e^{i\varphi 5} = \cos(5\varphi) + i \cdot \sin 5(\varphi)$

$$z^5 = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^5$$

$$z^5 = 1^5 + 5+1^4 \cdot i + 9 \cdot 1^3 \cdot i^3 +$$

$$\cos(5\varphi) = \binom{5}{0}\cos(\varphi)^5 \cdot \binom{5}{2}\cos(\varphi)^3 \cdot (-1) \cdot \sin(\varphi)^2 \cdot \frac{5}{4}\cos(\varphi)\,(-1)^2 \cdot \sin(\varphi)^4$$

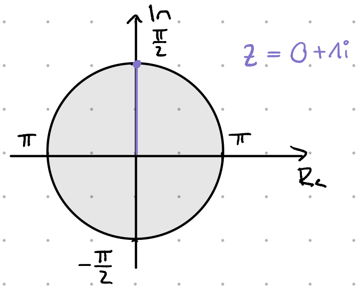
$$\cos(5\varphi) = \cos(\varphi)^5 - 10\cos(\varphi)^3 \cdot \sin(\varphi)^2 + 5\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)^4$$

$$\sin(5\varphi) = \binom{5}{1}\cos(\varphi)^4 \cdot i\sin(\varphi)\binom{5}{3}\cos(\varphi)^2 \cdot i \cdot (-1)\sin(\varphi)^3 \cdot \binom{5}{5}\cos(\varphi)^0\, i(-1)^2 \sin(\varphi)^5$$

$$\sin(5\varphi) = 5\sin(\varphi)\cos^4(\varphi) - 10\sin(\varphi)^2\cos(\varphi)^3 + \sin^5(\varphi)$$

3)

a) $z = \frac{1+2i}{2-i}$



$$= \frac{1+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}$$

$$= \frac{\cancel{5}i}{\cancel{5}}$$

$$z = i$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \sqrt{0^2+1^2}$$
$$= 1$$

Betrag: $|z| = i$

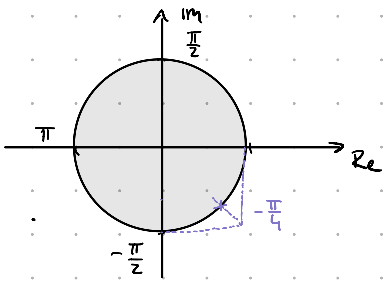
Argument: $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arctan \frac{Im}{Re} = \arctan\left(\frac{1}{0}\right)$

trigonometrisch: $z = |z| \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = i$

expotenziell: $r \cdot e^{i\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

---

b) $(1-i)^4 = z$



$$z = (1-i)^2 \cdot (1-i)$$
$$= (1^2 - 2\cdot 1\cdot i + i^2) \cdot (1^2 - 2\cdot 1\cdot i + i^2)$$
$$= (1 - 2i - 1) \cdot (1 - 2i - 1)$$
$$= 4 \cdot i^2 \cdot (-1)$$
$$= -4 \cdot i^2$$
$$= 4$$

$$z = 4 + 0i$$

$$|z| = \sqrt{4^2 + 0^2}$$
$$= \sqrt{16}$$
$$= 4$$

Argument $= \frac{Im}{Re}$ $\quad (-1 \cdot 1i)^4$

$$= \frac{-1}{1} \cdot 4$$
$$= -\frac{\pi}{4} \cdot 4$$
$$= -\pi$$

Betrag = $|z| = 4$

Argument = $\arctan\left(\frac{-1}{1}\right)$
$= -\frac{\pi}{4} \cdot 4$
$= -\pi$

trigonometrisch: $z = 4\left(\cos(-\pi) \cdot i\sin(-\pi)\right)$

expotenziell: $r \cdot e^{i\varphi} = 4\, e^{i-\pi}$