

Aufgabe 2-4 (Verteilung)

Von einer Probe an Glaskugeln, die zum Sandstrahlen eingesetzt werden sollen, wurden lichtmikroskopisch die Durchmesser bestimmt. Die gemessenen Partikelgrößen lagen zwischen 50 μm und 250 μm . Dieser Größenbereich wurde in zehn Klassen unterteilt, für die die folgenden Häufigkeiten ermittelt wurden:

Klasse i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ob. Klassen- grenze x_i , μm :	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250
Anzahl n_i :	2	13	47	27	19	16	38	51	7	1

- Berechnen Sie die Anzahl und Volumenverteilung!
- Stellen Sie jeweils Dichte- und Summenfunktion grafisch dar!
- Ermitteln Sie aus den Diagrammen die Modal- und Medianwerte!

Aufgabe 2-4 (Verteilung)

Definition: $\mu\text{m} := 10^{-6} \text{ m}$

Vorgegebene Werte:

Vektor der Klassengrenzen:

$$x := (50 \ 70 \ 90 \ 110 \ 130 \ 150 \ 170 \ 190 \ 210 \ 230 \ 250)^T \mu\text{m}$$

Häufigkeitsvektor:

$$n := (2 \ 13 \ 47 \ 27 \ 19 \ 16 \ 38 \ 51 \ 7 \ 1)^T$$

Lösung:

1. Anzahl- und Volumenverteilung

Anzahlverteilung

Gesamtanzahl $\sum n = 221$

relative Klassenanzahl: $\Delta Q_0 := \frac{n}{\sum n}$

Summenfunktion: $Q_{0_0} := 0$

$N := \text{länge}(n)$ $i := 1 \dots N$

$$Q_{0_i} := Q_{0_{i-1}} + \Delta Q_{0_{i-1}}$$

Vektor der Klassenmitten: $x_{m_{i-1}} := \frac{1}{2} \cdot (x_{i-1} + x_i)$

Dichtefunktion: $q_{0_{i-1}} := \frac{\Delta Q_{0_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}}$

Volumenverteilung

Klassenvolumina: $V := \left(n \cdot \frac{\pi}{6} \cdot x_{m_{i-1}}^3 \right)$ $\sum V = 4.903 \cdot 10^8 \mu\text{m}^3$

relative Klassenvolumina: $\Delta Q_3 := \frac{V}{\sum V}$

Summenfunktion: $Q_{3_0} := 0$

$$Q_{3_i} := Q_{3_{i-1}} + \Delta Q_{3_{i-1}}$$

Dichtefunktion: $q_{3_{i-1}} := \frac{\Delta Q_{3_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}}$

Ergebnisse:

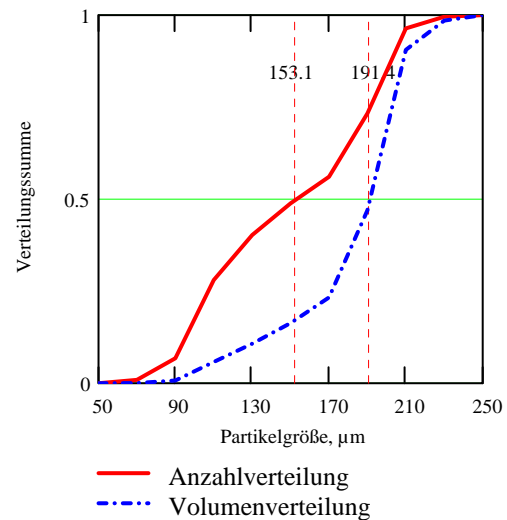
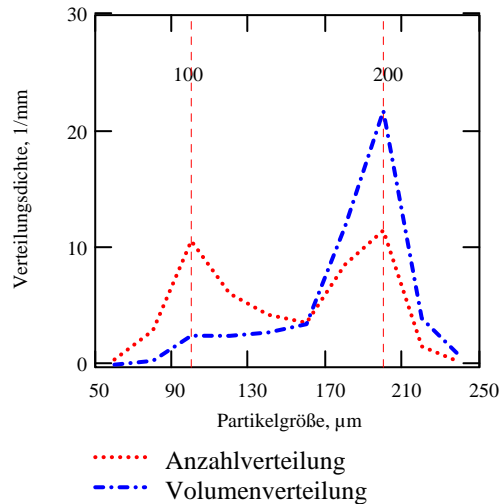
$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} 50 \\ 70 \\ 90 \\ 110 \\ 130 \\ 150 \\ 170 \\ 190 \\ 210 \\ 230 \\ 250 \end{matrix} \\
 x =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 6.79 \\ 28.05 \\ 40.27 \\ 48.87 \\ 56.11 \\ 73.3 \\ 96.38 \\ 99.55 \\ 100 \end{bmatrix} \\
 \mu\text{m} Q_0 =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.76 \\ 5.78 \\ 10.76 \\ 16.33 \\ 23.33 \\ 46.99 \\ 90.56 \\ 98.52 \\ 100 \end{bmatrix} \\
 \% Q_3 =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \\ 100 \\ 120 \\ 140 \\ 160 \\ 180 \\ 200 \\ 220 \\ 240 \end{bmatrix} \\
 x_m =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} 0.452 \\ 2.941 \\ 10.633 \\ 6.109 \\ 4.299 \\ 3.62 \\ 8.597 \\ 11.538 \\ 1.584 \\ 0.226 \end{bmatrix} \\
 \mu\text{m} q_0 =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} 0.023 \\ 0.355 \\ 2.51 \\ 2.491 \\ 2.784 \\ 3.499 \\ 11.834 \\ 21.786 \\ 3.98 \\ 0.738 \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{\text{mm}} q_3 =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \frac{1}{\text{mm}}
 \end{matrix}$$

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Aufgabe mit einer Tabellenkalkulationssoftware (wie Excel) zu bearbeiten. Das ermöglicht eine kompakte und übersichtliche Darstellung der berechneten Verteilungswerte.

i	x _i	x _{m,i}	Πx _i	n _i	ΠQ _{0,i}	Q _{0,i}	q _{0,i}	x _{m,i} ³ ·n _i	ΠQ _{3,i}	Q _{3,i}	q _{3,i}
-	μm	μm	μm	-	%	%	1/mm	μm	%	%	1/mm
0	50					0				0	
1	70	60	20	2	0.90%	0.90%	0.452	4.32E+05	0.05%	0.05%	0.023
2	90	80	20	13	5.88%	6.79%	2.941	6.66E+06	0.71%	0.76%	0.355
3	110	100	20	47	21.27%	28.05%	10.633	4.70E+07	5.02%	5.78%	2.510
4	130	120	20	27	12.22%	40.27%	6.109	4.67E+07	4.98%	10.76%	2.491
5	150	140	20	19	8.60%	48.87%	4.299	5.21E+07	5.57%	16.33%	2.784
6	170	160	20	16	7.24%	56.11%	3.620	6.55E+07	7.00%	23.33%	3.499
7	190	180	20	38	17.19%	73.30%	8.597	2.22E+08	23.67%	46.99%	11.834
8	210	200	20	51	23.08%	96.38%	11.538	4.08E+08	43.57%	90.56%	21.786
9	230	220	20	7	3.17%	99.55%	1.584	7.45E+07	7.96%	98.52%	3.980
10	250	240	20	1	0.45%	100.00%	0.226	1.38E+07	1.48%	100.00%	0.738
				Maximalwert fett							
Summe:				221				9.36E+08			5.00E+01
<i>Modalwerte:</i>	200.00						100				200
							200				

2. Dichte- und Summenfunktion

$$i := 0..N \quad j := 0..N-1$$



Hinweis 1: Die Funktionswerte der Dichtefunktion werden über den Klassenmitten, die Funktionswerte der Summenfunktion über den Klassenobergrenzen aufgetragen. Wem nicht klar ist warum, sollte sich zunächst noch einmal die Definitionen der Verteilungsfunktionen ansehen.

Hinweis 2: Bei Verwendung einer Tabellenkalkulationssoftware bieten sich mehr Möglichkeiten für die grafische Darstellung. Sie gestaltet sich überdies einfacher.

3. Modal- und Medianwerte

Anzahlverteilung (2 Modalwerte):

Modalwerte: $x_{\text{mod}1,0} = 100 \mu\text{m}$ $x_{\text{mod}2,0} = 200 \mu\text{m}$

Medianwert: $x_{50,0} = 153.1 \mu\text{m}$

Volumenverteilung (nur 1 Modalwert):

Modalwert: $x_{\text{mod}1,3} = 200 \mu\text{m}$

Medianwert: $x_{50,0} = 191.4 \mu\text{m}$