

---

## Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 7

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie alle  $t \in \mathbb{R}$ , für die die Gleichung  $z^2 - 8z + t^2 = 0$  genau

- (i) zwei verschiedene reelle
- (ii) eine (doppelt zu zählende) reelle
- (iii) zwei konjugiert komplexe

Lösungen besitzt. Geben Sie die Lösungen jeweils an.

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie alle Lösungen  $x \in \mathbb{C}$  der Gleichung

- (a)  $x^2 + 4 = 0$       (b)  $2x^2 - x + 6 = 0$       (c)  $x^4 + x^2 + \frac{25}{64} = 0$       (d)  $x^6 + 2x^3 + 2 = 0$

**Aufgabe 3:** Beweisen Sie die folgende Betragsgleichung und -ungleichung für  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$       (b)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

Die Ungleichung (b) wird Dreiecksungleichung genannt.

*Zusatz:* Prüfen Sie, ob die vorstehende Betragsgleichung auch für  $a \in \mathbb{C}$  und  $b \in \mathbb{C}$  gültig bleibt.

**Aufgabe 4:** Berechnen Sie die Werte von  $f(x)$  an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von  $f$  in reelle Elementarfunktionen (d.h. lineare oder quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten)

- (a)  $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$ ,      Stellen:  $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2$   
(b)  $f(x) = 2x^7 - x^6 + 2x^5 + 71x^4 + 68x^3 - 52x^2$ ,      Stellen:  $x_0 = -3, x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$

*Hinweis:* Nutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra für einen Ansatz zur Darstellung von  $f(x)$  als Produkt von Linearfaktoren der Form  $(x - x_j)$ .

---

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die komplexe Zahl  $z'$ , die das Spiegelbild von  $z = a + bi$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  und  $i^2 = -1$  ist bei Spiegelung

- (a) am Ursprung
- (b) an der reellen Achse
- (c) an der imaginären Achse
- (d) an der winkelhalbierenden Geraden des I. und III. Quadranten

(e) an der winkelhalbierenden Geraden des II. und IV. Quadranten

**Aufgabe 6:** Berechnen Sie unter Benutzung der Periodizität der Winkelfunktionen für  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ :

(a)  $(1 - i)^{21}$

(b)  $(1 + \sqrt{3}i)^{15}$

(c)  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^{32}$ .

**Aufgabe 7:** Lösen Sie die folgenden algebraischen Gleichungen und Ungleichungen.

(a)  $5x^2 + 2x - 2 = x - 1 - x^2$

(d)  $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

(b)  $x - 2 \geq 2x - \frac{1}{2}$

(e)  $x^2 + 4x + 13 \leq 0$

(c)  $3x^2 + x + 9 > 13x - 3$

(f)  $x^2 - 5x + 6 > 0$

**Aufgabe 8:** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die nachstehende Aussage.

Für eine beliebige algebraische Gleichung  $p_n(x) = 0$  mit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot x^i)$$

den Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{R}$  für  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $a_n = 1$  sowie den Lösungen

$$x_1 \in \mathbb{C}, \quad x_2 \in \mathbb{C}, \quad \dots \quad x_n \in \mathbb{C}$$

gelten die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n x_j = -a_{n-1} \tag{1}$$

$$\sum_{j_1 < j_2} (x_{j_1} \cdot x_{j_2}) = a_{n-2} \tag{2}$$

$$\sum_{j_1 < j_2 < j_3} (x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot x_{j_3}) = -a_{n-3} \tag{3}$$

$\vdots$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0 \tag{4}$$

wobei über  $j_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $j_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$  summiert wird.