14 Optimalitätsbedingungen in der nichtlinearen Optimierung

Optimierung für Nichtmathematiker

WS 2020/21

unrestringierte Optimierung $\nabla f(x^*) = 0$

Quizfrage

Ein Punkt $x^* \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ X heißt **lokales Minimum** für die Aufgabe

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & f(x), && x \in \mathbb{R}^n, \\
\text{sodass} \quad & g_i(x) \leqslant 0, && i = 1, \ldots, m, \\
\text{und} \quad & h_j(x) = 0, && j = 1, \ldots, p.
\end{aligned}
$$

Globales Min. ohne NB

mit zulässiger Menge X, wenn gilt:

lokales Min. ohne NB

1 **A** $f(x^*) \leqslant f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

0 **C** $f(x^*) \leqslant f(x)$ für alle $x \in X$

globales Min. mit NB

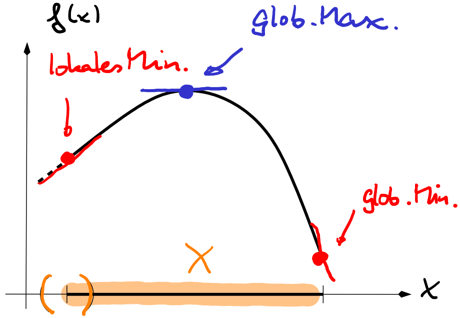
3 **B** $f(x^*) \leqslant f(x)$ für alle x aus einer Umgebung $U(x^*)$

5 **D** $f(x^*) \leqslant f(x)$ für alle x aus einer Umgebung $U(x^*)$, geschnitten mit X

Quizfrage

Was illustriert das nebenstehende Bild?

$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \geq 1$



0 **A** Jede Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen hat ein globales Minimum.

7 **C** In einem lokalen Minimum einer Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen ist die Ableitung der Zielfunktion nicht notwendig gleich null.

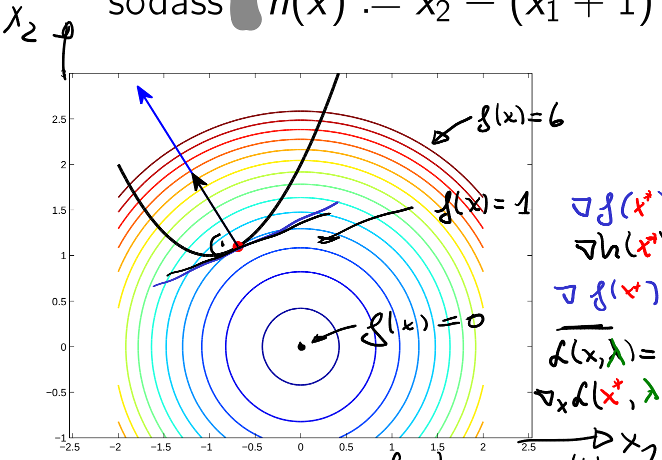
2 **B** In einem lokalen Maximum einer Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen ist die Ableitung der Zielfunktion gleich null.

trifft im Beispiel zu, also nicht immer!

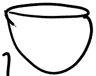
0 **D** Die zulässige Menge einer Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen ist immer ein Intervall.

Illustration notwend. Bedingungen

$$\text{Minimiere} \quad f(x) := x_1^2 + x_2^2, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad h(x) := x_2 - (x_1 + 1)^2 - 1 = 0$$



3D-Sicht auf f



$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x^*) \\ \nabla h(x^*)\end{array}\right\}$ sind Vielfache voneinander

$$\nabla f(x^*) = \underbrace{-\lambda}_{\text{unbekannt}} \nabla h(x^*)$$

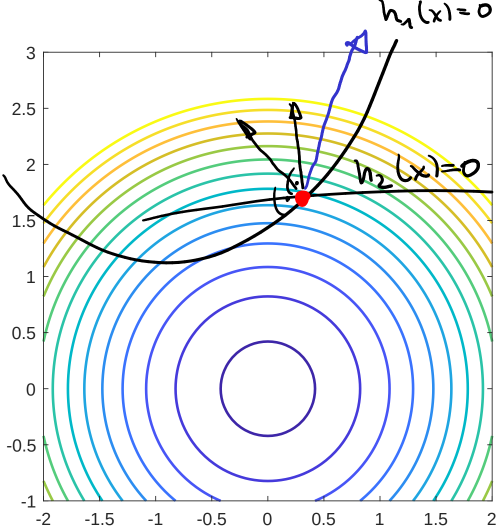
$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda h(x)$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = \nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) \boxed{= 0}$$

$\mathcal{L}$ = Lagrangefkt.

Mehrere Gleichungsbedingungen

x^* ist isolierter Punkt der zulässigen Menge und damit automatisch lokales Minimum.



$\lambda \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda) = \nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla h_1(x^*) + \lambda_2 \nabla h_2(x^*) \boxed{=0}$$

d.h.

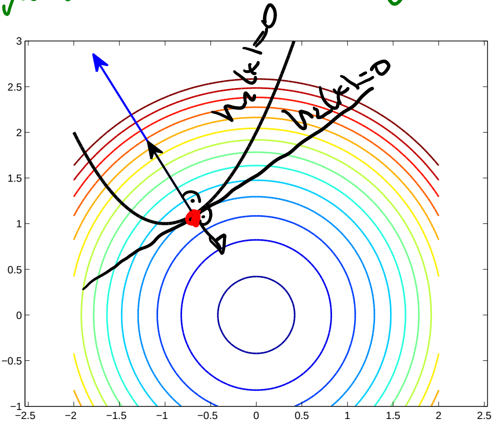
$$\nabla f(x^*) = -\lambda_1 \nabla h_1(x^*) - \lambda_2 \nabla h_2(x^*)$$

Man kann solche λ_1, λ_2 finden!

Mehrere Gleichungsbedingungen

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \underbrace{\nabla h_1(x^*) + \lambda_2 \nabla h_2(x^*)}_{\text{linear abhängig}} = 0 \quad \text{möglich?}$$

Ja, eine Wahl von λ_1, λ_2 ist möglich, und es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten!



$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$ erfüllt ein LGS:

$$\begin{bmatrix} | & | \\ \nabla h_1(x^*) & \nabla h_2(x^*) \\ | & | \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = -\nabla f(x^*)$$

Die Lösungsmenge ist ein 1D Raum.

Quizfrage

Wie lautet die Lagrange-Funktion für die allgemeine nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x), && x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \leqslant 0, && i = 1, \ldots, m, \\ \text{und} \quad & h_j(x) = 0, && j = 1, \ldots, p \text{ ?} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = \cdots$

1 A $f(x) + \mu^\mathsf{T} g(x) + \lambda^\mathsf{T} h(x)$

1 B $f(x) - \mu^\mathsf{T} g(x) + \lambda^\mathsf{T} h(x)$

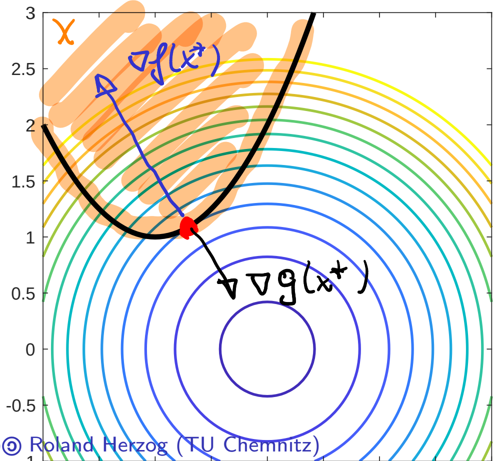
6 C $f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i\, g_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j\, h_j(x)$

0 D $f(x) + \lambda^\mathsf{T} h(x)$

Ungleichungsbedingung

Minimiere $f(x) := x_1^2 + x_2^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

sodass $g(x) := -[x_2 - (x_1 + 1)^2 - 1] \leq 0$



$\mathcal{L}(x,\mu) = f(x) + \mu\, g(x)$

$\nabla_x \mathcal{L}(x,\mu) = \nabla f(x) + \mu \nabla g(x) \boxed{= 0}$

Aber: μ muss ≥ 0 sein!

(1) Das unterscheidet Ungleichungs- von Gleichungs-NB!

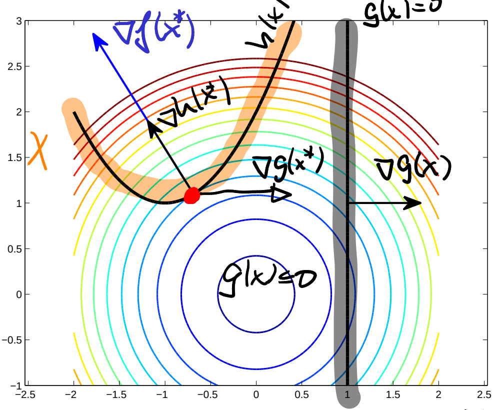
Inaktive Ungleichung

$\mathcal{L}(x,\mu,\lambda) = f(x) + \mu g(x) + \lambda h(x)$

$\nabla_x \mathcal{L}(x,\mu,\lambda) = \nabla f(x) + \mu \nabla g(x) + \lambda \nabla h(x) \boxed{=0}$

darf nicht verwendet werden!

μ muss $=0$ sein!



② Zu inaktiven Ungleichungen gehört $\mu_i = 0$!

$\boxed{g(x^*) < 0}$

← unwichtige (inaktive) Ungleichungsbedingung

Die KKT-Bedingungen

Wir nehmen an, x^* sei ein lokales Minimum der Aufgabe

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & f(x), && x \in \mathbb{R}^n, \\
\text{sodass} \quad & g_i(x) \leqslant 0, && i = 1, \dots, m, \\
\text{und} \quad & h_j(x) = 0, && j = 1, \dots, p.
\end{aligned}
$$

Falls bei x^* eine constraint qualification gilt,

„Nebenbedingung vernünftig formuliert"

dann gibt es Multiplikatoren $\mu \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, sodass gilt:

KKT-Bed.

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\
& g_i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mu_i \geq 0 & \text{falls } g_i(x^*) = 0 \\ \mu_i = 0 & \text{falls } g_i(x^*) < 0 \end{cases} \\
& h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p
\end{aligned}
\right.
$$

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

$\rightarrow$ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2