Aufgabe 2-1 (hydraulischer Durchmesser)

Mit welchen Kenngrößen lassen sich poröse Stoffsysteme charakterisieren?

In einem Bauunternehmen sollen täglich 400 Sack Trockenmischung à 50 kg aus Kies (ρ_K = 3000 kg/m³) und Zement (ρ_Z = 2550 kg/m³) im Verhältnis 4:1 gemischt und abgepackt werden. Die Trockenmischung besitzt eine Volumenporosität ε = 0,45 sowie eine massenspezifische Oberfläche von 20 m²/kg.

a) Berechnen Sie, wie viele Bunker der Nenngröße 5 m³ bestellt werden müssen, um eine Tagesproduktion Trockenmischung zu speichern! (Bestimmen Sie zuvor die effektive Dichte der dispersen Phase)

b) Berechnen Sie den hydraulischen Durchmesser des Produktes!

c) Welche Papiermenge wird benötigt, um eine Tagesproduktion abzupacken? Die Papiersäcke entsprechen Quadern mit den fest eingestellten Abmaßen Länge 0,6 m und Breite 0,4 m.

Aufgabe 2-1 (hydraulischer Durchmesser)

Definition: $\mu m := 10^{-6}\ m$

Vorgegebene Werte:

Verpackung: $N_{Sack} := 400$ $m_{Sack} := 50\ kg$ $L := 0.6\ m$ $B := 0.4\ m$

Bunker: $V_{Bunker} := 5\ m^3$

Stoffsysteme: $\rho_K := 3000\ \frac{kg}{m^3}$ $\rho_Z := 2550\ \frac{kg}{m^3}$

Mischung: $\nu := 4$ $\varepsilon := 0.45$ $S_m := 20\ \frac{m^2}{kg}$

Lösung:

0. Effektive Dichte des Partikelsystems

die folgende Herleitung gilt für jedes binäre, d.h. aus zwei Komponenten bestehende, System

effektive Dichte: $$\rho_{eff} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$$

Variante I:
(Massenanteile gegeben)
$$\rho_{eff} = \frac{m_{ges}}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} = \frac{m_{ges}}{\frac{w_1 \cdot m_{ges}}{\rho_1} + \frac{w_2 \cdot m_{ges}}{\rho_2}} = \frac{1}{\frac{w_1}{\rho_1} + \frac{w_2}{\rho_2}}$$

Variante II:
(Volumenanteile gegeben)
$$\rho_{eff} = \frac{V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2}{V_{ges}} = \frac{\phi_1 \cdot V_{ges} \cdot \rho_1 + \phi_2 \cdot V_{ges} \cdot \rho_2}{V_{ges}} = \phi_1 \cdot \rho_1 + \phi_2 \cdot \rho_2$$

1. Anzahl der Bunker

Massenanteil Kies: $w_K := \frac{\nu}{\nu + 1}$ $w_K = 0.8$

effektive Partikeldichte: $\rho_P := \left(\frac{w_K}{\rho_K} + \frac{1 - w_K}{\rho_Z}\right)^{-1}$ $\rho_P = 2897.7 \cdot kg \cdot m^{-3}$

Schüttdichte ($\rho_L << \rho_P$): $\rho_{Sch} := (1 - \varepsilon) \cdot \rho_P$ $\rho_{Sch} = 1593.8 \cdot kg \cdot m^{-3}$

Sackvolumen: $V_{Sack} := \frac{m_{Sack}}{\rho_{Sch}}$ $V_{Sack} = 31.37 \cdot l$

Tagesvolumenproduktion: $V_{Tag} := N_{Sack} \cdot V_{Sack}$ $V_{Tag} = 12.55 \cdot m^3$

Anzahl der Bunker: $N_{Bunker} := \mathrm{ceil}\left(\frac{V_{Tag}}{V_{Bunker}}\right)$ $N_{Bunker} = 3$

alternativer Lösungsweg (ohne Rückgriff auf effektive Partikeldichte und Schüttdichte):

Tagesproduktion: $m_{Tag} := N_{Sack} \cdot m_{Sack}$ $\quad m_{Tag} = 20000 \cdot kg$

Tagesbedarf Zement: $m_Z := \frac{1}{1+\nu} \cdot m_{Tag}$ $\quad m_Z = 4000 \cdot kg$

Tagesbedarf Kies: $m_K := \frac{\nu}{1+\nu} \cdot m_{Tag}$ $\quad m_K = 16000 \cdot kg$

benötigtes Partikelvolumen: $V_Z := \frac{m_Z}{\rho_Z}$ $\quad V_K := \frac{m_K}{\rho_K}$ $\quad V_P := V_Z + V_K$

$V_Z = 1.57 \cdot m^3$ $\quad V_K = 5.33 \cdot m^3$ $\quad V_P = 6.90 \cdot m^3$

benötigtes Schüttvolumen: $V_P = (1-\varepsilon) \cdot V_{Sch}$

$V_{Sch} := \frac{V_P}{1-\varepsilon}$ $\quad V_{Sch} = 12.55 \cdot m^3$

Anzahl der Bunker: $N_{Bunker} := \mathrm{ceil}\left(\frac{V_{Tag}}{V_{Bunker}}\right)$ $\quad N_{Bunker} = 3$

2. Hydraulischer Durchmesser

Hydraulischer Durchmesser von Kanälen und Gerinnen mit beliebiger Querschnittsform:

Hintergrund: Um den Druckverlust in durchströmten Rohren als Funktion des Volumenstroms darzustellen, müssen die Grundgleichungen reibungsbehafteter Strömungen für die jeweiligen Bedingungen gelöst werden. Für kreisrunde Runde sind diese Lösungen bekannt (z.B. die Hagen-Poiseuille-Gleichung für laminare Strömung). Für Rohre mit beliebig geformten Querschnitt, Rechteckkanäle oder offene Gerinne können solche analytischen Lösungen prinzipiell auch gefunden werden, doch in der Praxis ist es einfacher, den Druckverlust mit den Gleichungen für ein kreisrundes Rohr abzuschätzen. Der Durchmesser dieses Rohres soll dabei so groß sein, dass eine hydraulische Äquivalenz zum realen Querschnitt besteht. Er wird **hydraulischer Durchmesser d_h** genannt.

Die hydraulischer Äquivalenz bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen der Wandschubspannung τ_0 an der Rohrwand und dem Druckverlust über der gesamten Rohrlänge L (Rohrumfang = U_R, Querschnittsfläche = A_Q).

Kräftegleichgewicht: $\tau_0 \cdot U_R \cdot L = \Delta p \cdot A_Q$ $\quad \Rightarrow \quad \Delta p = \tau_0 \cdot \frac{U_R \cdot L}{A_Q}$

Kreisquerschnitt: $\Delta p = \tau_0 \cdot L \cdot \frac{4}{d}$ $\quad \Rightarrow \quad d_h = \frac{4 \cdot A_Q}{U_R} = \frac{4 \cdot V_R}{A_{Mantel}}$

Definition: hydraulischer Durchmesser d_h = Durchmesser eines Kreisrohres mit dem selben Verhältnis von durchströmten Volumen zu benetzter Oberfläche

Hydraulischer Durchmesser von Schüttungen:

Hintergrund:

In einer Reihe wichtiger verfahrenstechnischer Prozesse strömt ein Fluid durch ein poröses System (Schüttung), z.B. bei der Trinkwasseraufbereitung mit einem Sandfilter, bei katalytischen Gasreaktionen in Festbettreaktoren oder bei der Feststoffextraktion aus gemahlenen Kaffeebohnen). Für diese Durchströmung muss allerdings Energie aufgewandt werden, da die porösen Systeme dem Fluid einen Strömungswiderstand entgegensetzen. Für die Auslegung der entsprechenden Apparate und Anlagen ist es somit erforderlich, diesen Strömungswiderstand zumindest näherungsweise berechnen zu können. Zu diesem Zweck bedient man sich des **Modells** eines Röhrensystems, das die **reale** Strömung durch die unregelmäßig geformten Hohlräumen zwischen den Partikeln auf die **ideale** Strömung durch ein Bündel paralleler, kreisrunder Röhren mit einheitlichem Durchmesser abbildet. Eine adäquate Abbildung wird mit dem Konzept des hydrualische Durchmessers erreicht. Also dann, wenn in dem Modell das Verhältnis von durchströmten Volumen V_{eff} zu umströmter Oberfläche S_{eff} mit dem des realen Stoffsystems übereinstimmt.

Berechnung des hydraulischen Durchmessers:

allgemein: $d_h = \dfrac{4 \cdot V_{eff}}{S_{eff}}$

id. Schüttung: $V_{eff} = \varepsilon \cdot V_{ges} = \varepsilon \cdot \dfrac{V_{disp}}{(1-\varepsilon)}$ $\qquad S_{eff} = S_{disp} = S_V \cdot V_{disp}$

$$d_h = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{S_V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot d_{ST}$$

volumenspezifische Oberfläche: $S_V := S_m \cdot \rho_P$ $\qquad S_V = 579.5 \cdot \dfrac{cm^2}{cm^3}$

hydraulischer Durchmesser: $d_h := 4 \cdot \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \dfrac{1}{S_V}$ $\qquad d_h = 56.47 \cdot \mu m$

3. Papierbedarf

Höhe der Papiersäcke: $H := \dfrac{V_{Sack}}{L \cdot B}$ $\qquad H = 13.1 \cdot cm$

Oberfläche der Säcke: $A_{Sack} := 2 \cdot (L \cdot B + L \cdot H + B \cdot H)$ $\qquad A_{Sack} = 0.741 \cdot m^2$

Tagespapierbedarf: $A_{Papier} := N_{Sack} \cdot A_{Sack}$ $\qquad A_{Papier} = 296.6 \cdot m^2$