TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERGAKADEMIE FREIBERG
Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

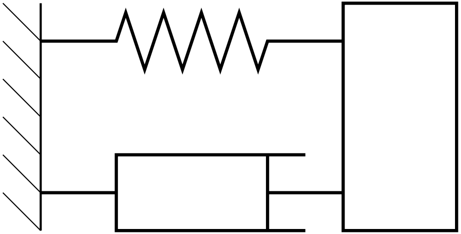
HELMHOLTZ
Zentrum für Umweltforschung

Vorlesung Bodendynamik

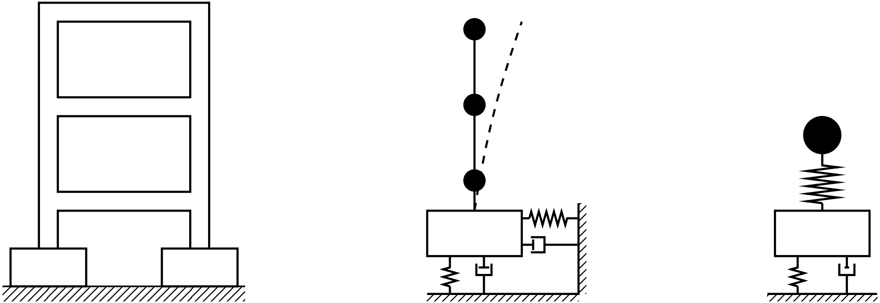
Sommersemester 2023

Thema: Einfreiheitsgradschwingungen

EINMASSENSCHWINGER

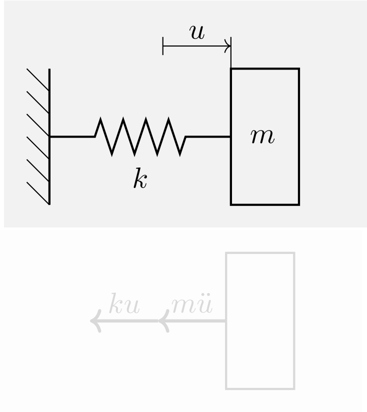


EINMASSENSCHWINGER



Verschiedene Modelle eines Gebäudes auf Baugrund [Hau86]

FREIE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

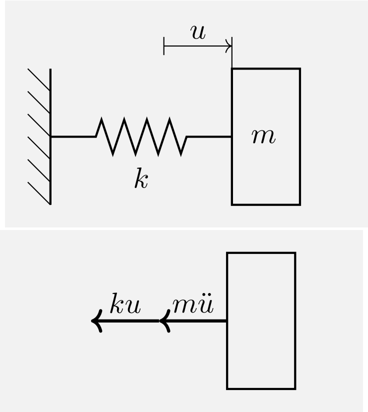
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

FREIE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

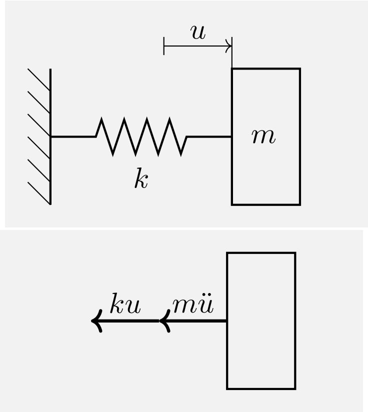
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

FREIE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

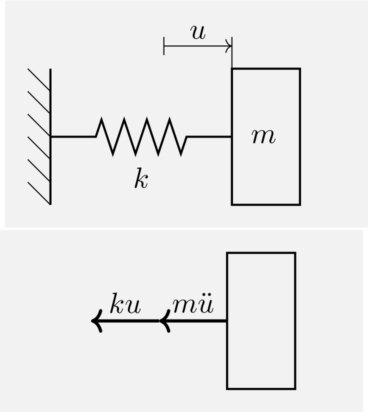
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

FREIE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

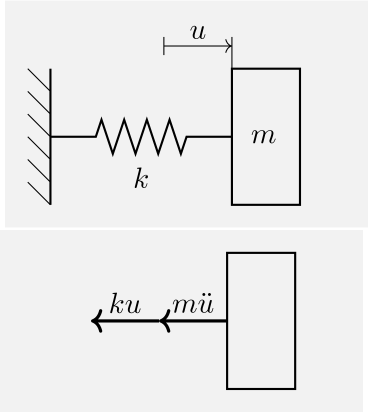
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

FREIE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

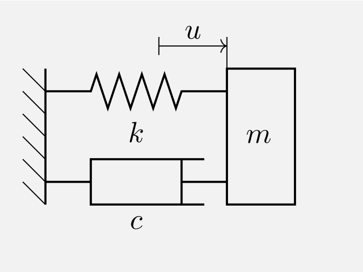
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/4



Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

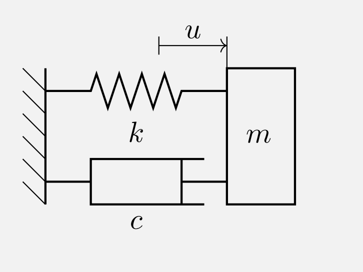
Standardform

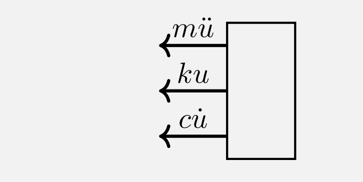
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/4





Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

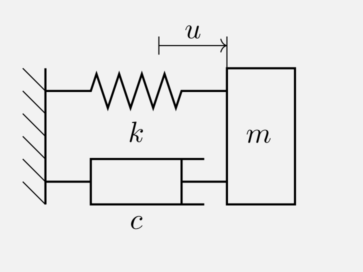
Standardform

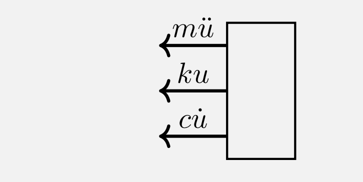
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/4





Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

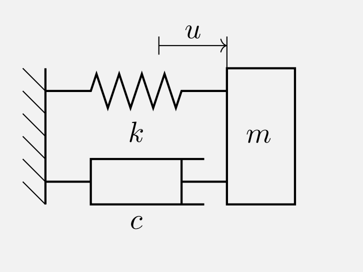
Standardform

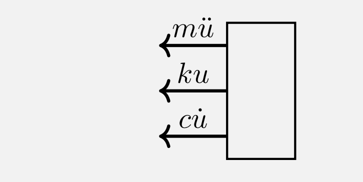
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/4





Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 2/4

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} + 2D\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u &= 0 \\
u(t_0) &= u_0 \\
\dot{u}(t_0) &= \dot{u}_0
\end{aligned}
$$

Gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
$\rightsquigarrow$ Exponentialansatz $u(t) = Ae^{rt}$ $\rightsquigarrow$ charakteristische Gleichung

$$
\begin{aligned}
r^2 + 2D\omega_n r + \omega_n^2 &= 0 \\
&\rightsquigarrow r_1, r_2 = -D\omega_n \pm \omega_n \sqrt{D^2 - 1}
\end{aligned}
$$

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n \left(D - \sqrt{D^2 - 1}\right) t} + A_2 e^{-\omega_n \left(D + \sqrt{D^2 - 1}\right) t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t} \left(B_1 \cos \omega_\mathrm{D} t + B_2 \sin \omega_\mathrm{D} t\right)$$

  mit $\omega_\mathrm{D} = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{rt} = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-D\omega_n t}$$

Knobelspaß siehe *mehrfache Nullstellen der charakteristischen Gleichung*!

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n \left(D - \sqrt{D^2 - 1}\right) t} + A_2 e^{-\omega_n \left(D + \sqrt{D^2 - 1}\right) t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t} \left(B_1 \cos \omega_\mathrm{D} t + B_2 \sin \omega_\mathrm{D} t\right)$$

mit $\omega_\mathrm{D} = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{rt} = (A_1 + A_2 t) e^{-D\omega_n t}$$

Knobelspaß siehe *mehrfache Nullstellen der charakteristischen Gleichung*!

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n\left(D-\sqrt{D^2-1}\right)t} + A_2 e^{-\omega_n\left(D+\sqrt{D^2-1}\right)t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t}\left(B_1 \cos \omega_\mathrm{D} t + B_2 \sin \omega_\mathrm{D} t\right)$$

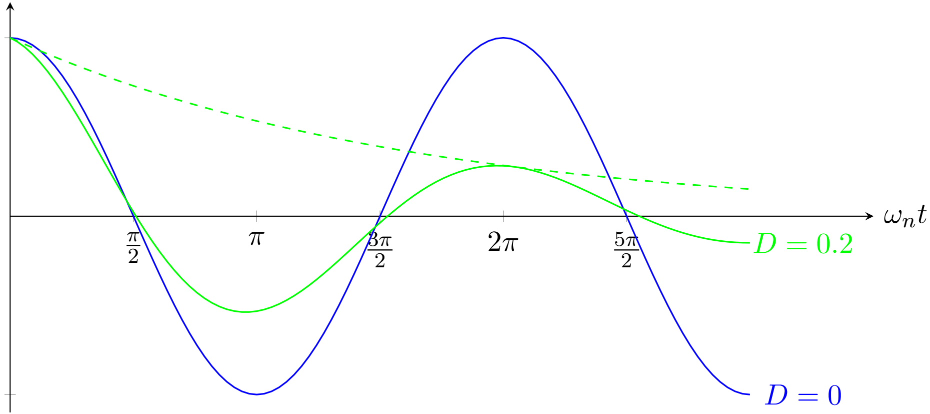
  mit $\omega_\mathrm{D} = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{rt} = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-D\omega_n t}$$

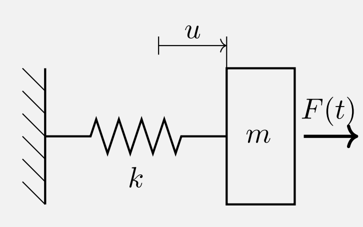
Knobelspaß siehe *mehrfache Nullstellen der charakteristischen Gleichung*!

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 4/4



Zeitverlauf bei unterkritischer Dämpfung

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 1/2



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

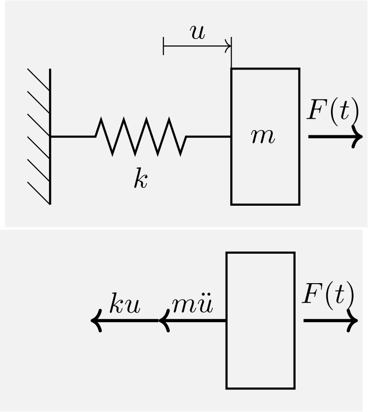
Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 1/2



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

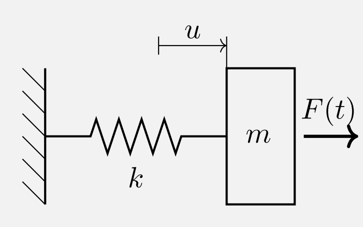
Standardform

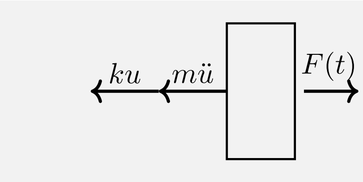
$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 1/2





Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

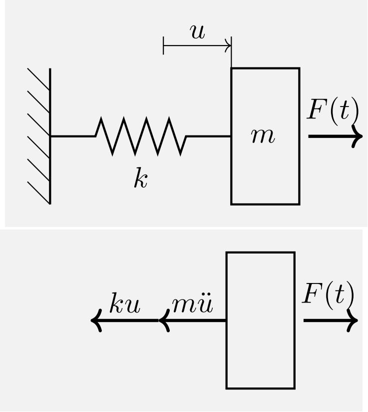
Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 1/2



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 2/2

Die Gesamtlösung ist die Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung (*Einschwingen*) und einer partikulären Lösung (*eingeschwungener Zustand*).
Bei einfacher harmonischer Anregung

$$a(t) = a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t$$

lautet die Gesamtlösung (siehe Anhang) für $\omega \neq \omega_n$

$$u(t) = \underbrace{B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t}_{u_h(t)} + \underbrace{\frac{a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t}{1 - (\omega/\omega_n)^2}}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen.

Anmerkung: das Einschwingen endet nie und bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ passiert etwas *besonderes*.

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 2/2

Die Gesamtlösung ist die Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung (*Einschwingen*) und einer partikulären Lösung (*eingeschwungener Zustand*).
Bei einfacher harmonischer Anregung

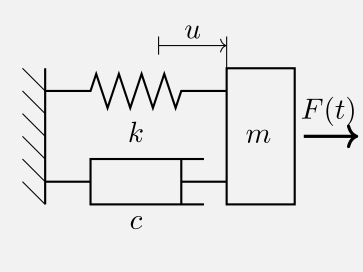
$$a(t) = a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t$$

lautet die Gesamtlösung (siehe Anhang) für $\omega \neq \omega_n$

$$u(t) = \underbrace{B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t}_{u_h(t)} + \underbrace{\frac{a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t}{1 - (\omega/\omega_n)^2}}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen.
Anmerkung: das Einschwingen endet nie und bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ passiert etwas *besonderes*.

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/5



Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

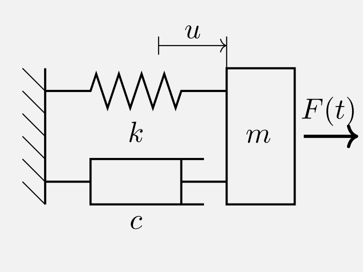
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

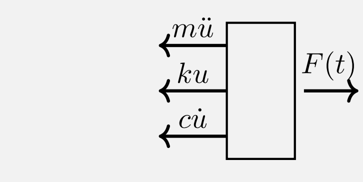
$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/5





Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

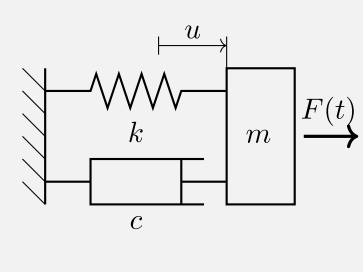
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

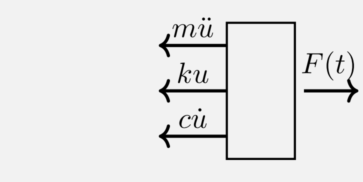
$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/5





Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

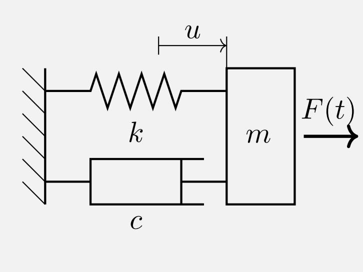
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

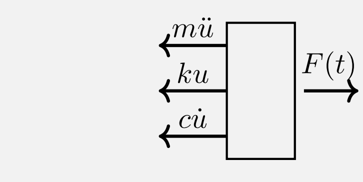
$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/5





Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 2/5

Für einfache harmonische Anregung $a(t) = a_C \cos \omega t + a_S \sin \omega t$ lautet die Gesamtlösung

$$u(t) = \underbrace{e^{-\delta t} \big(B_1 \cos \omega_\mathrm{D} t + B_2 \sin \omega_\mathrm{D} t \big)}_{u_h(t)} + \underbrace{u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen, während die Koeffizienten der partikulären Lösung durch die Anregung festgelegt sind (siehe nächste Folie).

Die Lösung $u_h(t)$ entspricht der freien gedämpften Schwingung.

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 3/5

Die Koeffizienten der partikulären Lösung $u_p(t) = u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t$ lauten

$$u_C = V^2 \Big((1 - \beta^2) a_C - 2D\beta a_S \Big),$$
$$u_S = V^2 \Big((1 - \beta^2) a_S + 2D\beta a_C \Big),$$

mit den Hilfsgrößen Vergrößerungsfunktion und Abstimmungsverhältnis

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2}},$$
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}.$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 4/5

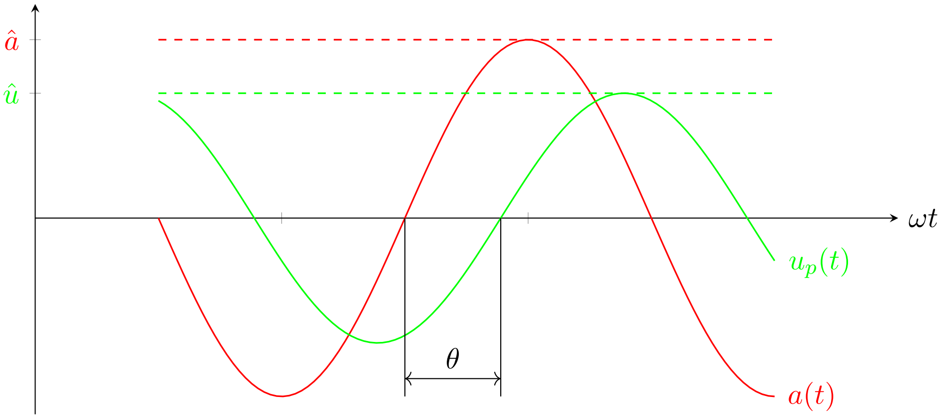
Alternativ lassen sich Anregung und eingeschwungene Antwort auch durch Amplitude und Phasenwinkel darstellen

$$a(t) = \hat{a}\cos(\omega t - \theta_a) \quad \text{mit} \quad \hat{a}^2 = a_S^2 + a_C^2 \quad \text{und} \quad \tan\theta_a = \frac{a_S}{a_C},$$
$$u_p(t) = \hat{u}\cos(\omega t - \theta_u) \quad \text{mit} \quad \hat{u}^2 = u_S^2 + u_C^2 \quad \text{und} \quad \tan\theta_u = \frac{u_S}{u_C}.$$

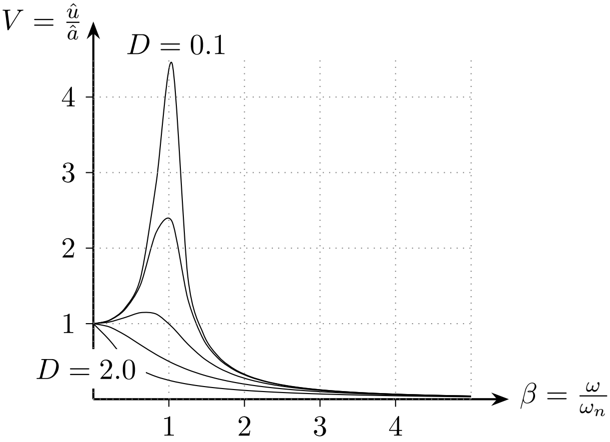
In dieser Darstellung lauten die Beziehungen zwischen Anregung und Antwort

$$\hat{u} = V\hat{a},$$
$$\theta = \theta_u - \theta_a = \arctan\left(\frac{2D\beta}{1-\beta^2}\right).$$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 5/5

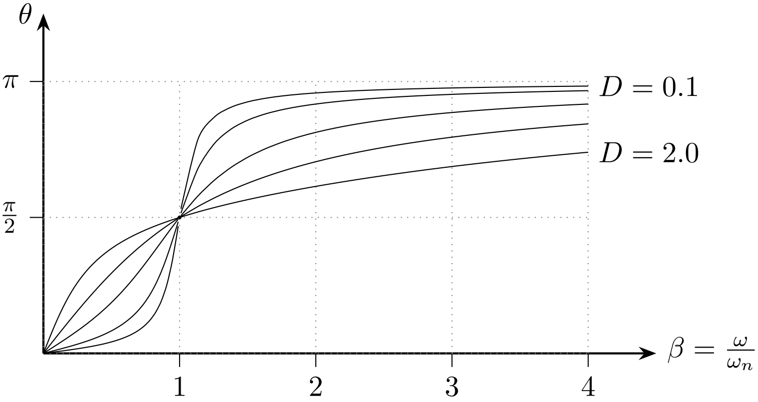


ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 5/5



Vergrößerungsfunktion für $D = 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 5/5



Phasendifferenz für $D = 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0$

LEISTUNGSBILANZ 1/3

Die anregende Kraft (Annahme: $\theta_F = \theta_a = 0 \rightsquigarrow \theta_u = \theta$)

$$F = \hat{F}\sin(\omega t)$$

und die resultierende Antwort im eingeschwungenen Zustand $u(t) = u_p(t)$

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t - \theta)$$
$$\dot{u}(t) = \hat{u}\omega\cos(\omega t - \theta)$$

ergeben die mechanische Leistung

$$P(t) = F(t)\,\dot{u}(t)$$
$$P(t) = \hat{F}\sin(\omega t)\,\hat{u}\omega\cos(\omega t - \theta)$$

LEISTUNGSBILANZ 2/3

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(x)\cos(x-y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(2x-y) + \sin(y)\Big)$$

lässt sich die mechanische Leistung

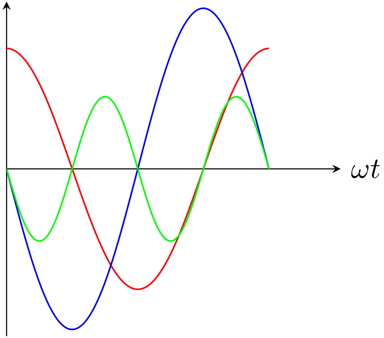
$$P(t) = \hat{F}\hat{u}\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t - \theta)$$

$$P(t) = \underbrace{\frac{\hat{F}\hat{u}\omega}{2}\sin(2\omega t - \theta)}_{\text{Blindleistung}} + \underbrace{\frac{\hat{F}\hat{u}\omega}{2}\sin(\theta)}_{\text{Wirkleistung}}$$

als Schwankung um einen konstanten Mittelwert darstellen.

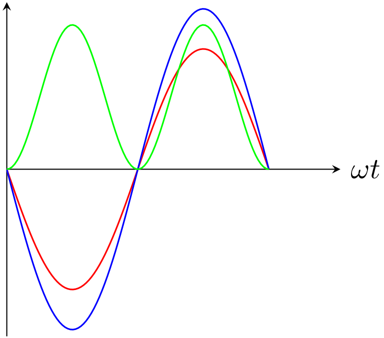
LEISTUNGSBILANZ 3/3

Grenzfall des Energiespeichers



Federkraft F_F,
Geschwindigkeit $\dot{u}$ und
Momentanleistung P_F

Grenzfall der Energiequelle/-senke



Dämpferkraft F_D,
Geschwindigkeit $\dot{u}$ und
Momentanleistung P_D

Literaturverzeichnis

[Bro+12] Ilja N Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. Bd. 1. Springer-Verlag, 2012. ISBN: 3818120168.

[Hau86] Wolfgang Haupt. *Bodendynamik: Grundlagen und Anwendung*. Vieweg, 1986. ISBN: 9783528088781.

ERÄNZENDE HERLEITUNGEN UND ALTERNATIVE HERLEITUNGEN MIT KOMPLEXER RECHNUNG

Achtung, Notation noch nicht durchgehend vereinheitlicht!

FREIE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT

Lösung des unterkritisch gedämpften Falls

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A_1 e^{-\omega_n\left(D-\sqrt{D^2-1}\right)t} + A_2 e^{-\omega_n\left(D+\sqrt{D^2-1}\right)t} \\
&= A_1 e^{-\omega_n D t} e^{\omega_n \sqrt{D^2-1}\,t} + A_2 e^{-\omega_n D t} e^{-\omega_n \sqrt{D^2-1}\,t} \\
&= A_1 e^{-\overbrace{\omega_n D}^{\delta} t} e^{i\,\overbrace{\omega_n \sqrt{1-D^2}}^{\omega_\mathrm{D}}\,t} + A_2 e^{-\overbrace{\omega_n D}^{\delta} t} e^{-i\,\overbrace{\omega_n \sqrt{1-D^2}}^{\omega_\mathrm{D}}\,t} \\
&= A_1 e^{-\delta t} e^{i\omega_\mathrm{D} t} + A_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega_\mathrm{D} t} \\
&= \Big(A_1(\cos\omega_\mathrm{D} t + i\sin\omega_\mathrm{D} t) + A_2(\cos\omega_\mathrm{D} t - i\sin\omega_\mathrm{D} t)\Big) e^{-\delta t} \\
\Re\{u(t)\} &= \Big(\underbrace{\Re\{A_1 + A_2\}}_{B_1}\cos\omega_\mathrm{D} t\, \underbrace{-\Im\{A_1 - A_2\}}_{B_2}\sin\omega_\mathrm{D} t\Big) e^{-\delta t}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: $u(t) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \Re\{A_1\} = \Re\{A_2\}$, $\Im\{A_1\} = -\Im\{A_2\}$

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 1/2

Um eine partikuläre Lösung für harmonische Anregung $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$ zu finden, wählen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$
\begin{aligned}
u_p(t) &= u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t, \\
\dot{u}_p(t) &= -u_C \omega \sin \omega t + u_S \omega \cos \omega t, \\
\ddot{u}_p(t) &= -u_C \omega^2 \cos \omega t - u_S \omega^2 \sin \omega t.
\end{aligned}
$$

Zunächst beschränken wir uns auf den Cosinus-Anteil (Sinus analog).

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 2/2

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (Standardform) führt auf

$$-u_C\omega^2\cos\omega t + u_C\omega_n^2\cos\omega t = a_C\omega_n^2\cos\omega t.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$u_C = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2}a_C \quad \rightsquigarrow \quad u_p(t) = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}a_C\cos\omega t.$$

Bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ versagt dieser Ansatz, dann lautet die Lösung

$$u_p(t) = \frac{a_C\omega}{2}t\sin\omega t$$

Knobelspaß siehe *Variation der Konstanten* [Bro+12].

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, UNGEDÄMPFT 2/2

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (Standardform) führt auf

$$-u_C\omega^2\cos\omega t + u_C\omega_n^2\cos\omega t = a_C\omega_n^2\cos\omega t.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$u_C = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2}a_C \quad \rightsquigarrow \quad u_p(t) = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}a_C\cos\omega t.$$

Bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ versagt dieser Ansatz, dann lautet die Lösung

$$u_p(t) = \frac{a_C\omega}{2}t\sin\omega t$$

Knobelspaß siehe *Variation der Konstanten* [Bro+12].

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 1/2

Wie im ungedämpften Fall, und allgemein für jede inhomogene Differentialgleichung, gilt für die Gesamtlösung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Für einfache harmonische Anregung $a(t) = a_C \cos \omega t + a_S \sin \omega t$ führt der Ansatz $u_p(t) = u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t$ auf

$$u_C = V^2 \Big((1 - \beta^2) a_C - 2D\beta a_S \Big)$$
$$u_S = V^2 \Big((1 - \beta^2) a_S + 2D\beta a_C \Big)$$

Vergrößerungsfunktion $V = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2}}$, Abstimmungsverhältnis $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$.

Anmerkung: der eingeschwungene Zustand für andere Anregungsarten (Dämpferfußpunkt-, Fundament-, Unwucht-) weist qualitative Unterschiede auf, die Herleitung verläuft aber analog.

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN, GEDÄMPFT 2/2

Summen von Sinus- und Cosinusfunktionen lassen sich mittels Additionstheoremen durch eine der beiden Funktionen darstellen

$$a(t) = \hat{a}\cos(\omega t - \theta_a) = \overbrace{\hat{a}\cos\theta_a}^{a_C}\cos(\omega t) + \overbrace{\hat{a}\sin\theta_a}^{a_S}\sin(\omega t).$$

Amplitude $\hat{a}$ und Phasenwinkel θ_a sind folglich festgelegt durch

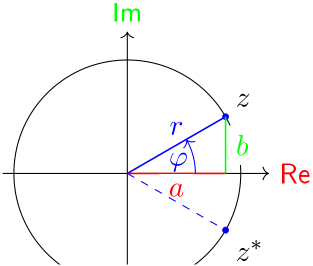
$$\hat{a}^2 = a_S^2 + a_C^2 \qquad \text{und} \qquad \tan\theta_a = \frac{a_S}{a_C}.$$

In dieser Darstellung lauten die Beziehungen zwischen Anregung und Antwort

$$\frac{\hat{u}}{\hat{a}} = V \qquad \text{und} \qquad \theta = \theta_u - \theta_a = \arctan\left(\frac{2D\beta}{1-\beta^2}\right).$$

Anmerkung: Die Phasendifferenz wird üblicherweise auf $\theta \in (-\pi, \pi]$ begrenzt.

ERINNERUNGEN AN KOMPLEXE ZAHLEN



$$z = a + ib = re^{i\varphi}$$
$$z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$
$$\sphericalangle z = \arctan \frac{b}{a} = \varphi$$

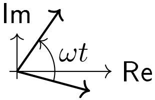
$$\mathrm{Re}\{z\} = a = r\cos\varphi$$
$$\mathrm{Im}\{z\} = b = r\sin\varphi$$

Ausgewählte Formeln

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$
$$(z_1 z_2^*)^* = z_1^* z_2$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$$

Frequenzgang und Leistungsbetrachtung werden nun wiederholt ($u \in \mathbb{C}$).

FREQUENZGANG ($U \in \mathbb{C}$) 1/3



Komplexe Erweiterung (Re „*sichtbar*“, Im „*mitschleppen*“)

$$u(t) = \hat{u}\, e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{u} = r_u e^{-i\psi_u},$$
$$a(t) = \hat{a}\, e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{a} = r_a e^{-i\psi_a},$$
$$F(t) = \hat{F}\, e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{F} = r_F e^{-i\psi_F}.$$

Standardform des erregten, (viskos) gedämpften Einmassenschwingers

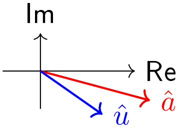
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \hat{a}\, e^{i\omega t}.$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned} -\omega^2\hat{u}\, e^{i\omega t} + 2i\zeta\omega_0\omega\hat{u}\, e^{i\omega t} + \omega_0^2\hat{u}\, e^{i\omega t} &= \omega_0^2\hat{a}\, e^{i\omega t}, \\ \left(-\eta^2 + 2i\zeta\eta + 1\right)\hat{u}\, e^{i\omega t} &= \hat{a}\, e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

FREQUENZGANG ($U \in \mathbb{C}$) 2/3

$$\hat{u} = \underbrace{\frac{1}{1 - \eta^2 + 2i\zeta\eta}}_{H(\eta)} \hat{a}$$



Der Frequenzgang $H(\eta)$ enthält sowohl die Vergrößerungsfunktion

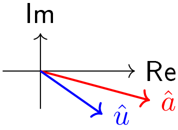
$$V = |H| = \left| \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} - \frac{2i\eta\zeta}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)^2 + (2\eta\zeta)^2}{\left((1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

FREQUENZGANG ($U \in \mathbb{C}$) 3/3

$$\hat{u} = \underbrace{\frac{1}{1-\eta^2+2i\zeta\eta}}_{H(\eta)}\hat{a}$$

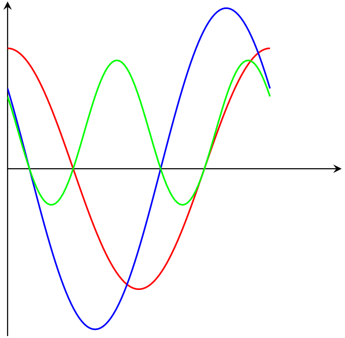


.. als auch die Phasendifferenz

$$\psi = -\sphericalangle H = -\sphericalangle\left\{\frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2} - \frac{2i\eta\zeta}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}\right\}$$
$$= -\arctan\left(\frac{-2\eta\zeta}{1-\eta^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2}\right)$$

Arbeit über eine Periode $W_T = \pi\hat{F}\hat{u}\sin\theta$ mit $\sin\theta = \frac{2\beta\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\beta\eta)^2}}$ für viskose und $\sin\theta = \frac{2\beta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\beta\eta)^2}}$ für hysteretische Dämpfung.

LEISTUNGSBILANZ ($U \in \mathbb{C}$) 1/3



Anregende Kraft F,
Geschwindigkeit $\dot{u}$ und
Momentanleistung P

$$
\begin{aligned}
F &= r_F\, e^{i(\omega t - \psi_a)} \\
u &= r_u\, e^{i(\omega t - \psi_u)} \\
&= r_u\, e^{i(\omega t - \psi_a - \psi)} \\
v &= i\omega r_u\, e^{i(\omega t - \psi_a - \psi)} \\
&= \omega r_u\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i(\omega t - \psi_a - \psi)} \\
&= \omega r_u\, e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_a - \psi\right)} \\
r_v &= \omega r_u \\
\psi_v &= \psi_a + \psi - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

LEISTUNGSBILANZ ($U \in \mathbb{C}$) 2/3

$$
\begin{aligned}
P &= \mathrm{Re}\left\{F\right\} \mathrm{Re}\left\{v\right\} \\
&= \frac{1}{2}(F + F^*)\frac{1}{2}(v + v^*) \\
&= \frac{1}{4}\big(Fv + Fv^* + F^*v + F^*v^*\big) = \frac{1}{4}\Big(Fv + Fv^* + (Fv + Fv^*)^*\Big) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{Fv + Fv^*\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{r_F\, e^{i(\omega t - \psi_a)} r_v\, e^{i(\omega t - \psi_v)} + r_F\, e^{i(\omega t - \psi_a)} r_v\, e^{-i(\omega t - \psi_v)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{r_F r_v}{2} e^{i(\psi_v - \psi_a)}\big(e^{i2(\omega t - \psi_v)} + 1\big)\right\}
\end{aligned}
$$

LEISTUNGSBILANZ ($U \in \mathbb{C}$) 3/3

$$P = \mathrm{Re}\left\{P_S\left(e^{i2(\omega t - \psi_v)} + 1\right)\right\} \qquad \text{mit} \qquad P_S = \frac{r_F r_v}{2} e^{i(\psi_v - \psi_a)}$$

Formelsammlung: $\quad \mathrm{Re}\{z_1 z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\}\mathrm{Re}\{z_2\} - \mathrm{Im}\{z_1\}\mathrm{Im}\{z_2\}$

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Re}\left\{P_S\right\}\mathrm{Re}\left\{e^{i2(\omega t - \psi_v)} + 1\right\} - \mathrm{Im}\left\{P_S\right\}\mathrm{Im}\left\{e^{i2(\omega t - \psi_v)} + 1\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{P_S\right\}\left(\cos(2\omega t - 2\psi_v) + 1\right) - \mathrm{Im}\left\{P_S\right\}\sin(2\omega t - 2\psi_v) \end{aligned}$$

Damit ist die Scheinleistung $|P_S|$ dargestellt als Summe eines schwellenden Verlaufs (Wirkleistung $\mathrm{Re}\{P_S\}$) und eines mittelwertfreien Verlaufs (Blindleistung $\mathrm{Im}\{P_S\}$).