Vorbereitungsaufgaben

Aufgabe 1

Klassifizieren Sie die folgenden DGL hinsichtlich Ordnung, Linearität sowie ggf. homogen/inhomogen und Art der Koeffizienten.
Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der DGL sowie die Lösungen der Anfangs- bzw. Randwertprobleme:

(a) $y'(x) = \frac{6x^2+1}{\mathrm{e}^{y(x)}}$, $y(1) = 0$

Führen Sie hier außerdem vier Schritte des Eulerverfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$ aus um eine Näherungslösung zu erhalten und berechnen Sie den relativen Fehler bzgl. dieser Näherung nach diesen vier Schritten. Geben Sie die Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen genau an.

(b) $3y' = \frac{6x}{x^2+4}y + \frac{3x^3}{2} + 6x$, $y(2) = -8$

Benutzen Sie hierbei die Formel $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a^2|$

(c) $2y'' - 2y' - 40y = 580\cos 2x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(d) $2y'' - 2y' - 40y = -120 - 36\mathrm{e}^{-4x}, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = -7$

(e) $\ddot{f} + 9f = 18t^2 - 9\pi t \qquad f(0) = 1, \qquad \dot{f}(\pi) = 0$

(f) $(x^2 - 3)y' = 8xy^{-4}, \qquad y(2) = 1,$

Aufgabe 2

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$ an. Skizzieren Sie die Niveaulinien die durch die Punkte $P_1 = (1;\ 2)$ und $P_2 = (-3, 0)$ verlaufen in ein geeignetes Koordinatensystem. Berechnen Sie die Tangenten an die Niveaulinien in $P_1,\ P_2$ und zeichnen Sie diese ebenfalls ein.

Aufgabe 3

Berechnen Sie Lage und Typ aller Extremwerte der Funktionen

(a) $z = f(x, y) = xy^2 + 3 + 2x^2 + \frac{y^3}{3} + y^2 - 4x - \frac{1}{3}$

(b) $u = f(x, y, z) = 4x^2 - 8x + y^2 + yz - 7y + z^2 - 8z$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Funktion $z = f(x, y) = y^2 + 4x + x^2 + 6y + 9$.

(a) Berechnen Sie Lage und Typ aller Extremwerte von f.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie von f zum Niveau $z = 4$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Berechnen Sie anschließend alle Tangenten an diese Niveaulinie, die einen Steigungswinkel von $-45°$ haben.

Aufgabe 5

Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = x^4y + 8\sqrt{x^2 + y^2 + 2} + 3$ an der Stelle $(1;\ 1)$ in ein Taylorpolynom 1. und 2. Grades. Wie groß ist der betragsmäßige Unterschied der Näherungen zum exakten Funktionswert an der Stelle $(0.9;\ 1.1)$.

Berechnen Sie anschließend eine Schätzung für $|f(1,\ 1) - f(0.9,\ 1.1)|$ mit dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Aufgabe 6

Berechnen Sie unter Verwendung der Formeln

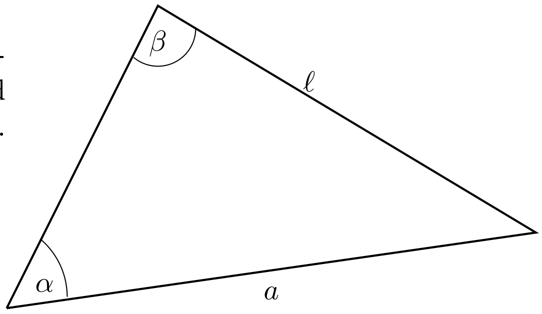
$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

eine Regressionsgerade $g(x) = ax + b$ für die Messwerte in der Tabelle.

x_i in [N]	-2	0	1	2	3
y_i in [cm]	-4.2	-3.3	2.7	5.2	5.9

Schätzen Sie mit der erhaltenen Funktion eine Prognose für $x = 4$N und $x = 1.5$N. Geben Sie die Ergebnisse als Dezimalzahlen auf 3 Nachkommastellen genau an.

Aufgabe 7



Wir betrachten die Dreiecksfläche in der nebenstehenden Skizze, wobei die Länge ℓ gesucht ist. Für die Größen a, α, β sind Messwerte $a = 75 \pm 0.04m$, $\alpha = 40° \pm 1°$, $\beta = 55° \pm 2°$ gegeben. Die Länge der Seite ℓ kann durch

$$\ell = a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

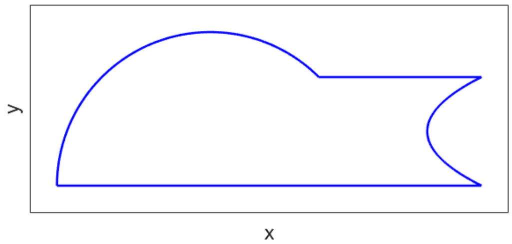
berechnet werden.

Berechnen Sie aus den gegeben Daten Näherungen für die gesuchte Seitenlänge sowie für den absoluten und relativen Fehler. Geben Sie damit absolute und relative Fehlerschranken für ℓ an.

Aufgabe 8

Der ebene Bereich B in der Skizze rechts setzt sich aus den Teilbereichen B_1 und B_2 zusammen. Dabei wird der Teilbereich B_1 wie folgt begrenzt

$$y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 8, \quad y \geq x.$$



Teilbereich B_2 wird durch die Kurven

$$y = 0, \quad y = 2, \quad y = x, \quad x - y^2 + 2y - 6 = 0$$

begrenzt.

(a) Stellen Sie B_1 als Normalbereich in ebenen Polarkoordinaten und B_2 als **einen geeigneten** kartesischen Normalbereich dar.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von Doppelintegralen die Masse des Bereichs B bezüglich der Flächendichte $\rho(x, y) = y$. Alle Integrationsschritte sind dabei anzugeben.

Aufgabe 9

Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten das Volumen des Körpers, der von

$$x^2 + y^2 = 16, \quad x \geq 0, \quad -\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad z = 6x + 3y + 3$$

begrenzt wird. Alle Integrationsschritte sind dabei anzugeben.

Aufgabe 10

Ein Automat produziert Kugeln für Kugellager. Der Durchmesser einer Kugel werde als normalverteilte Zufallsgröße D mit dem Solldurchmesser von 8.00 mm als Erwartungswert μ und einer Varianz σ^2 von 0.0016 mm^2 betrachtet. Ziehen Sie zur Beantwortung der nachfolgenden Aufgaben die der Klausur angehängte Tabelle der Standardnormalverteilung heran. Geben Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau an.

(a) Eine Kugel gilt als unbrauchbar, wenn ihr Durchmesser kleiner als $\mu - 2\sigma$ oder größer als $\mu + \sigma$ ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass eine Kugel unbrauchbar ist.

(b) Berechnen Sie, auf welchen Solldurchmesser bei gleichbleibender Varianz von 0.0016 mm^2 der Automat eingestellt werden muss, so dass 90% der Kugeln einen Durchmesser von höchstens 9.95 mm haben?

Kurz-Lösungen

(nur finale Resultate)

Aufgabe 1

(a) Nichtlinear 1. Ordnung
$y(x) = \ln(2x^3 + x - 2)$, Näherungslösung $\tilde{y}_4 = 1.6949$, relativer Fehler $|y(x_4) - \tilde{y}_4|/|y(x_4)| = 0.0682$.

(b) Linear 1. Ordnung, inhomogen, variable Koeffizienten
$y(x) = x^4/4 - x^2 - 8$,

(c) Linear 2. Ordnung, inhomogen, konstante Koeffizienten
$y(x) = 7\mathrm{e}^{-4x} + 6\mathrm{e}^{5x} - 12\cos 2x - \sin 2x$

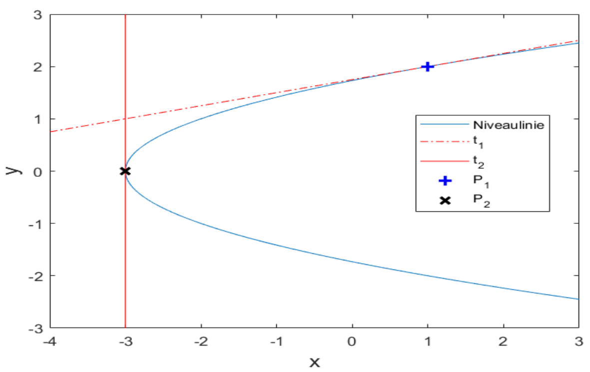
(d) Linear 2. Ordnung, inhomogen, konstante Koeffizienten
$y(x) = \mathrm{e}^{-4x} - \mathrm{e}^{5x} + 2x\mathrm{e}^{-4x} + 3$

(e) Linear 2. Ordnung, inhomogen, konstante Koeffizienten
$f(t) = \frac{13}{9}\cos 3t + \pi \sin 3t - \pi t + 2t^2 - \frac{4}{9}$

(f) Nichtlinear 1. Ordnung
$y(x) = \sqrt[5]{20 \ln|x^2 - 3| + 1}$

Aufgabe 2

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y^2 \geq x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \sqrt{x} \leq y \leq -\sqrt{x}\}$
Niveaulinie $y^2 - x = 3$ für beide Punkte (Parabel)
Tangente durch P_1: $y = t_1(x) = x/4 + 7/4$
Tangente durch P_2: $x = t_2(y) = -3$ (senkrechte Gerade)



Aufgabe 3

(a) Minimum $(x_1;\ y_1;\ z_1) = (1;\ 0;\ 2/3)$
und zwei Sattelpunkte $(x_2;\ y_2;\ z_2) = (0;\ -2;\ 4)$, $(x_3;\ y_3;\ z_3) = (-3;\ 4;\ 22)$

(b) Minimum $(x;\ y;\ z;\ u) = (1;\ 2;\ 3;\ -23)$

Aufgabe 4

(a) Minimum bei $(-2,\ -3,\ -4)$

(b) Skizze: Kreis mit Radius $\sqrt{8}$ und Mittelpunkt $(-2;\ -3)$
Insgesamt 2 Tangenten in den Berührungspunkten: $(x_1;\ y_1) = (0; -1)$, $(x_2;\ y_2) = (-4; -5)$
$t_1(x) = -x - 1$, $t_2(x) = -(x+4) - 5 = -x - 9$

Aufgabe 5

$$T_1(x,y) = 8x + 5y + 7, \qquad T_2(x,y) = \frac{15}{2}x^2 + 3xy - 10x + \frac{3}{2}y^2 - y + 19$$
$$|f(0.9;\ 1.1) - T_1(0.9;\ 1.1)| = 0.0617, \qquad |f(0.9;\ 1.1) - T_2(0.9;\ 1.1)| = 0.0017$$
$$\text{lin. Fehlerfortpflanzung}: \qquad |f(1,\ 1) - f(0.9,\ 1.1)| \approx 1.3$$

Aufgabe 6

Regressionsgerade: $g(x) = 2.3081x - 0.5865$; Prognosen $g(4N) = 8.6459\text{cm}$, $g(1.5N) = 2.8757\text{cm}$

Aufgabe 7

$\overline{\ell} = 58.8524m$, abs. Fehler $\Delta\ell \approx 2.6939m$, rel. Fehler $\frac{\Delta\ell}{\overline{\ell}} = 0.04577$
$\Rightarrow \ell = \overline{\ell} \pm \Delta\ell = [58.8524m \pm 2.6939m]$, $\ell = \overline{\ell}(1 \pm \frac{\Delta\ell}{\overline{\ell}}) = 58.8524m(1 \pm 0.04577)$

Aufgabe 8

(a)

$$B_1 = \{(r,\phi):\ 0 \le r \le \sqrt{8},\quad \frac{\pi}{4} \le \phi \le \pi\}$$
$$B_2 = \{(x,y):\ 0 \le y \le 2,\quad y \le x \le y^2 - 2y + 6\} \text{ y-Normalbereich}$$

Alternative mit x-Normalbereich für B_2 auch möglich, aber sehr umständlich:

$$B_2 = B_2^1 \cup B_2^2 \cup B_2^3 \cup B_2^4$$
$$B_2^1 = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le x\}, \qquad B_2^2 = \{(x,y):\ 2 \le x \le 5,\quad 0 \le y \le 2\}$$
$$B_2^3 = \{(x,y):\ 5 \le x \le 6,\quad 0 \le y \le 1 - \sqrt{x-5}\}, \quad B_2^4 = \{(x,y):\ 5 \le x \le 6,\quad 1 + \sqrt{x-5} \le y \le 2\}$$

(b) $m = \underbrace{\frac{16}{3}(1+\sqrt{2})}_{m_1} + \underbrace{8}_{m_2} = \frac{40}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{3} \approx 20.8758 \quad \text{(ME)}$

Aufgabe 9

$V = 12\pi + 32\sqrt{3} + 96$ VE

Aufgabe 10

(a) $P(\text{Kugel unbrauchbar}) = 18.14\%$, **(b)** $\mu = 9.90$ mm