



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.



Vorlesung Bodendynamik

Sommersemester 2023

Thema: Elastodynamik

ÜBERSICHT



IRIS Earthquake Science: 3-component Seismogram — Capturing the motion of an earthquake.

ELASTIZITÄT

Im einfachsten Fall isotropes, linear elastisches Bodenverhalten (Lame Konstanten λ und μ)

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \right),$$

komponentenweise ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \varepsilon_V + 2\mu \varepsilon_{xx} & 2\mu \varepsilon_{xy} & 2\mu \varepsilon_{xz} \\ & \lambda \varepsilon_V + 2\mu \varepsilon_{yy} & 2\mu \varepsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \lambda \varepsilon_V + 2\mu \varepsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

mit

$$\varepsilon_V = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad \dots$$

IMPULSBILANZ

Mit Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

komponentenweise ausgeschrieben

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

IMPULSBILANZ

Mit Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

isotrop, linear elastisch

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

VIDEO



Keith Miller: Demonstrating P and S Seismic Waves

VORBETRACHTUNG

Wir betrachten zunächst eine in x -Richtung laufende, ebene Welle

$$u_x(x, y, z, t) = \bar{u}_x(x - vt),$$

$$u_y(x, y, z, t) = \bar{u}_y(x - vt),$$

$$u_z(x, y, z, t) = \bar{u}_z(x - vt),$$

damit vereinfacht sich die Impulsbilanz zu

$$\rho v^2 \bar{u}_x'' = (\lambda + 2\mu) \bar{u}_x'',$$

$$\rho v^2 \bar{u}_y'' = \mu \bar{u}_y'',$$

$$\rho v^2 \bar{u}_z'' = \mu \bar{u}_z''.$$

VORBETRACHTUNG

Diese vereinfachte Impulsbilanz

$$\rho v^2 \bar{u}_x'' = (\lambda + 2\mu) \bar{u}_x'',$$

$$\rho v^2 \bar{u}_y'' = \mu \bar{u}_y'',$$

$$\rho v^2 \bar{u}_z'' = \mu \bar{u}_z'',$$

lässt zwei Lösungen zu

- Longitudinalwelle $\bar{u}_x \neq 0$, $\bar{u}_y = 0$, $\bar{u}_z = 0$ mit $v^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ (P-Welle);
- Transversalwelle $\bar{u}_x = 0$, $\bar{u}_y \neq 0$, $\bar{u}_z \neq 0$ mit $v^2 = \frac{\mu}{\rho}$ (S-Welle).

Anmerkung: Schubmodul μ und Steifemodul $\lambda + 2\mu$



VORBETRACHTUNG

Kinematik ebener P-Welle

VORBETRACHTUNG

Kinematik ebener S-Welle

P-WELLEN

Erinnerung Impulsbilanz

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) & \left| \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) & \left| \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) & \left| \frac{\partial}{\partial z} \right. \end{aligned}$$

addieren

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon_V}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_V}{\partial z^2} \right)$$

S-WELLEN

Erinnerung Impulsbilanz (x -, y -Richtung)

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \right.$$

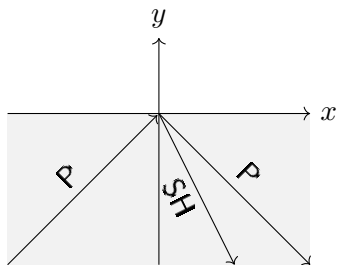
$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

subtrahieren

$$\rho \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right)$$

mit $\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$. Analog zwei weitere Gleichungen für ω_x und ω_y .

REFLEXION AM RAND



Einfallende P-Welle

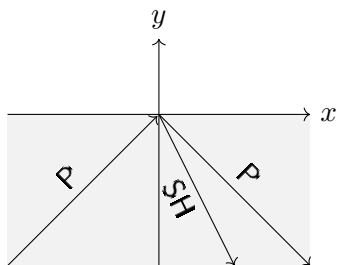
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} A_1 e^{i\kappa_1(x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 - v_P t)}$$

Reflektierte P- und SH-Welle

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \sin \alpha_2 \\ -\cos \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} A_2 e^{i\kappa_2(x \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2 - v_P t)}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_z \times \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} A_3 e^{i\kappa_3(x \sin \beta - y \cos \beta - v_S t)}$$

REFLEXION AM RAND



Spannungsfreier Rand

$$\sigma_{xy}(x, 0, z, t) = 0$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, z, t) = 0$$

Reflektierte P-Welle

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

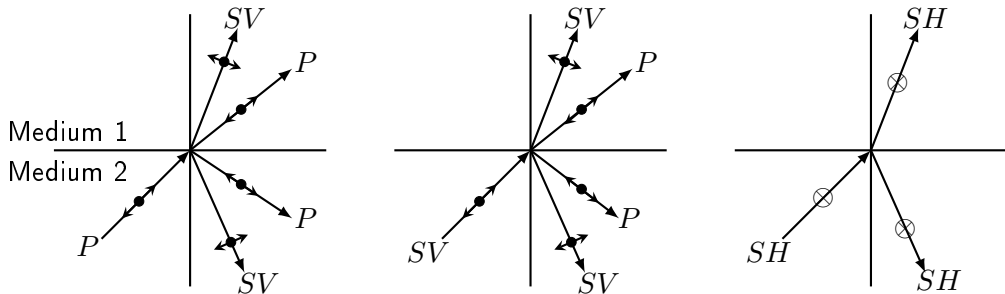
$$\kappa_1 = \kappa_2$$

Reflektierte SH-Welle

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{\kappa_3}{\kappa_1} = \frac{v_P}{v_S}$$

und Amplituden ... *siehe Übung.*

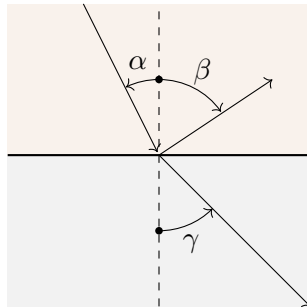
REFLEXION/TRANSMISSION AM ÜBERGANG



Wellenausbreitung an einem diskontinuierlichen Übergang [Vre17]

REFLEXION/TRANSMISSION AM ÜBERGANG

Die Richtungen der transmittierten und reflektierten Wellen lassen sich aus dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz $\frac{\sin \alpha}{v_{\text{ein}}} = \frac{\sin \beta}{v_{\text{ref}}} = \frac{\sin \gamma}{v_{\text{trans}}}$ bestimmen.



Knobelspaß: Wie verteilen sich die Amplituden auf die transmittierten und reflektierten Anteile? Extraspaß: Was bedeuten Lösungen $\sin x > 1$?

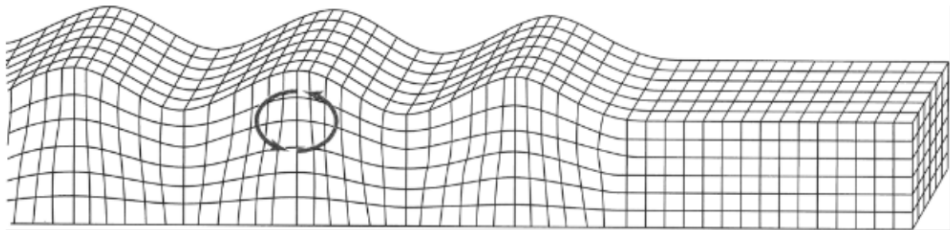
VIDEO



Wolfram: Propagation of Seismic Waves: Rayleigh waves

Wolfram: Propagation of Seismic Waves: Love waves

RAYLEIGH WELLEN

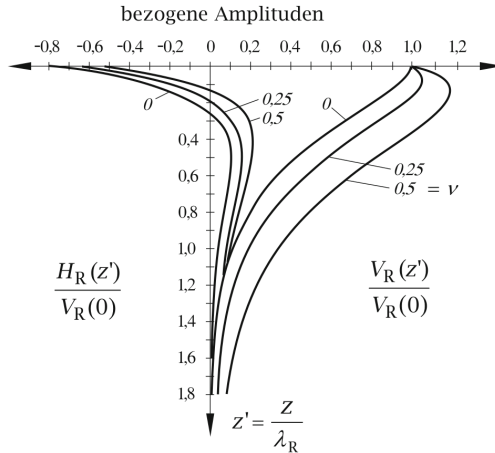


Kinematik [Vre17]

Rayleigh-Wellen sind eine Überlagerung von P-Wellen und vertikal polarisierten S-Wellen (SV), und werden durch die Halbraumbedingungen ermöglicht.

RAYLEIGH WELLEN

Abb. 23.8 Verlauf der auf $V_R(0)$ bezogenen Amplituden der freien *Rayleighwelle* mit der Tiefe und in Abhängigkeit von der Querdehnzahl ν ; $V_R(z')$ Vertikalkomponente, $H_R(z')$ Horizontalkomponente, nach Empfehlungen „Baugruddynamik“ (2002)



Exponentielle Abnahme der Amplituden mit der Tiefe [Sch17]

KREISFUNDAMENT

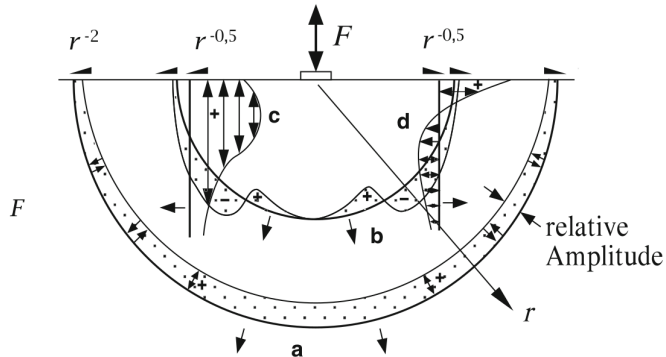
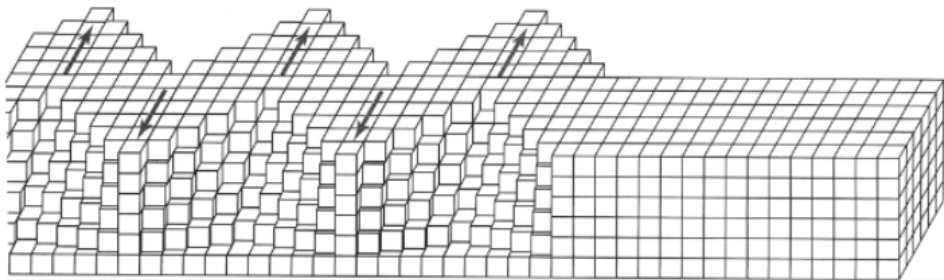


Abb. 23.9 Verschiebungsfeld der Wellenarten im Halbraum infolge eines angeregten Fundaments F ; a Druckwelle; b Scherwelle; c Rayleighwelle, vertikale Komponente; d Rayleighwelle, horizontale Komponente, gemäß Woods (1968)

Wellenausbreitung unter einem Maschinenfundament [Sch17]

LOVE WELLEN

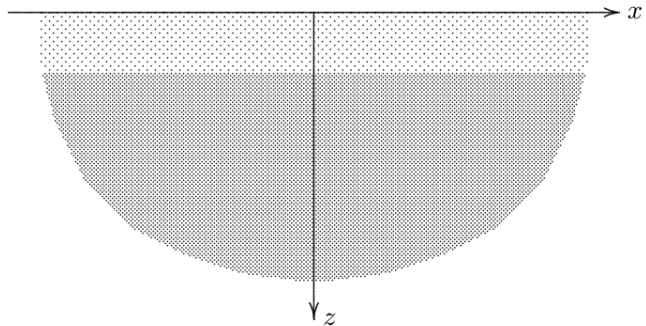


Kinematik [Vre17]

Love-Wellen sind eine Überlagerung horizontal polarisierter S-Wellen (SH).

LOVE WELLEN

Fig. 9.4 Soft layer on a stiff half space



Love-Wellen sind nur möglich, wenn sich eine weiche Oberflächenschicht auf einem steifen Halbraum befindet [Ver10] und entstehen nur oberhalb einer Grenzfrequenz.

Durch Love-Wellen können Erdbeben schwere Zerstörungen anrichten.

GEOMETRISCHE DÄMPFUNG

Punktförmige Wellenquelle (idealisiert)

- Raumwellen
 - breiten sich kugelförmig aus,
 - ihre Energie verteilt sich auf einer Kugelfläche $A = 4\pi r^2$.
- Oberflächenwellen
 - breiten sich kreisförmig aus,
 - ihre Energie verteilt sich auf einem Kreisumfang $U = 2\pi r$.

Das Quadrat der Amplituden verhält sich proportional zur Energie.

GEOMETRISCHE DÄMPFUNG

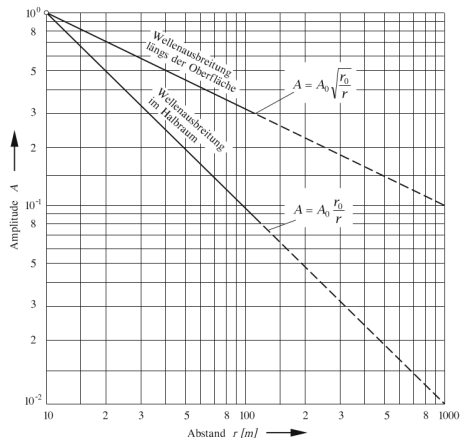


Abb. 23.10 Abnahme der Erschütterungsamplituden A mit dem Abstand r

Abnahme der Amplituden mit dem Abstand [Sch17]

ZAHLENWERTE

P-Wellen Geschwindigkeiten abhängig vom Porenwasser (ohne Kompressibilität gibt es keine P-Wellen) im Bereich $1450 \text{ m s}^{-1} \dots 5000 \text{ m s}^{-1}$.

S-Wellen Geschwindigkeiten nahezu unabhängig von Porenwasser, breiten sich nicht in Fluiden (Erdkern) aus, im Boden Werte $100 \text{ m s}^{-1} \dots 2000 \text{ m s}^{-1}$.

Rayleigh-Wellen Langsamer als S-Wellen ($v_R \approx 0.9v_S$) und abhängig von den gemittelten Bodenparametern. Aufgrund der frequenzabhängigen Eindringtiefe sind diese Wellen dispersiv.

Love-Wellen Geschwindigkeit liegt zwischen denen der S-Wellengeschwindigkeiten beider Schichten, ebenfalls dispersiv.

WEITERE EINFLUSSFAKTOREN

- Tiefen-/druckabhängige Bodenparameter
- Grundwasserspiegel, Porenfluid
- Anisotrope Gesteinseigenschaften
- Schichtung und kontinuierliche Übergänge
- Lokale Inhomogenitäten (Risse, Einschlüsse)
- . . .

- [Sch17] Hans-Henning Schmidt. *Grundlagen der Geotechnik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017, Online-Ressource (XVI, 783 Seiten 545 Abb., 3 Abb. ISBN: 978-3-658-14930-7. DOI: 10.1007/978-3-658-14931-4.
- [Ver10] Arnold Verruijt. *An Introduction to Soil Dynamics*. Bd. 47. 12. Dordrecht: Springer Netherlands, Aug. 2010, S. 47–6894–47–6894. ISBN: 978-90-481-3440-3. DOI: 10.1007/978-90-481-3441-0.
- [Vre17] Christos Vrettos. „Bodendynamik“. In: *Grundbau-Taschenbuch*. Wiley, Apr. 2017, S. 573–631. DOI: 10.1002/9783433607275.ch9.