TU Bergakademie Freiberg
Dr. M. Winkler

Freiberg, 22. November 2024
Abgabe am 6. Dezember 2024

Optimierung für Mathematiker/innen

Übung 7

Aufgabe 27: Simplex-Verfahren zum Lösen eines LPs

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(b) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Lösen Sie das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus. Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor.

Aufgabe 28: Simplex-Verfahren in 3D

Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 - 2\,x_3 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Löse das Problem grafisch.

(b) Forme das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Berechne alle Basisvektoren (mit zugehöriger Basis- und Nichtbasismatrix) und identifiziere diese in der Skizze aus (a). Welche der Basisvektoren sind zulässig?

(d) Löse das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) Starte mit dem zu $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ gehörenden Basisvektor.

Aufgabe 29: Phase I Bestimmung am Beispiel

Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & x_1 + x_2 + 2\,x_3 & & \\ \text{sodass} & 2\,x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ & x_1 - x_2 + 4\,x_3 & = & 2 \\ & 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 & \leq & 5 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Formuliere mit Hilfe von Satz 7.10 ein geeignetes Phase-I-Problem.

Aufgabe 30: Ein gerade aus der Basis entfernter Index wird im nächsten Schritt nicht wieder aufgenommen

Es sei x ein zulässiger Basisvektor im Simplex-Verfahren, wobei die reduzierten Kosten noch nicht ≥ 0 sind. Zeige, dass ein im folgenden Schritt aus der Basis entfernter Index s im direkt anschließenden Simplex-Schritt nicht wieder in die Basis aufgenommen werden kann.
Folgerung: Zyklen im Simplex-Verfahren haben mindestens die Länge $p = 3$.

Hinweis: Verwende die Cramersche Regel.

Hausaufgabe 15: Jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein

Es sei x ein zulässiger Basisvektor zur Basis B des durch $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$, $x \geq 0$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) beschriebenen Polyeders. Zeige, dass ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass x die einzige Optimallösung von

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax = b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

ist. Das heißt, jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein.

Hinweis: Konstruiere ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit Einträgen $c_j \in \{0, 1\}$, abhängig davon, ob j Basisindex oder nicht ist.

Hausaufgabe 16: Implementierung des Simplex-Algorithmus

Implementiere den (primalen) Simplexalgorithmus für ein lineares Programm in Normalform in Matlab (Algorithmus 7.6 aus der Vorlesung). Erstelle dazu eine Datei `simplex.m` und verwende

```
function [x,f,basis,iter] = simplex(A,b,c,basis,pricing)
```

als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & A\,x = b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

und `basis` beim Aufruf die Startbasis. Durch `pricing` sollen zwei Auswahlstrategien für $r \in N$ mit $\tilde{c}_r < 0$ und $s \in B$ möglich sein:

- `'greedy'`: Wähle die kleinsten reduzierten Kosten, d. h. $r = \arg\min_{j \in N} \tilde{c}_j$.
- `'bland'`: Verwende die Regel von Bland, d. h. die Indizes r und s sind die jeweils *kleinsten* in Frage kommenden Indizes.

Rückgabewerte sind ein optimaler Basisvektor `x`, der zugehörige Zielfunktionswert `f`, die zugehörige Basis `basis` und die Anzahl der benötigten Iterationen `iter`.

Teste den Algorithmus jeweils mit beiden Auswahlregeln an folgenden Problemen:

(a) Das lineare Programm aus Aufgabe 27 mit der Startbasis aus Teilaufgabe (b).

(b) Das Mozartproblem in Normalform aus der Vorlesung (Beispiel 6.6). Wähle als Startbasis die Indizes der Schlupfvariablen.

(c) Das Programm mit folgenden Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

Wähle als Startbasis: $\{5, 6, 7\}$.

Hinweis: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren. Die Datei `simplex.m` von der Homepage zur Lehrveranstaltung kann als Vorlage genutzt werden. Korrigiere die mit `% FIXME` kommentierten Codezeilen.

Abgabe: Schicke die erzeugten `m`-Files (`simplex.m`, `test_`x`.m`, $x \in \{$`a`,`b`,`c`$\}$) an max.winkler@math.tu-freiberg.de (Betreff: HA Optimierung für Mathematiker/innen Übung 7).