

Klausuraufgabe - Turbulenz 1

Ein Salatdressing soll auf Basis einer 30 Vol.-%-igen Sonnenblumenöl-in-Wasser Emulsion hergestellt werden ($\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\eta_W = 1 \text{ mPa s}$, $\rho_{\text{Öl}} = 920 \text{ kg/m}^3$). Das Emulgieren erfolgt mit einem Scheibenrührer ($d_R = 50 \text{ cm}$, $n_R = 200 \text{ min}^{-1}$), dessen Leistungscharakteristik wie folgt angenähert werden kann:

$$\text{Re} < 15: \text{Ne} = 22 / \text{Re}$$

$$15 < \text{Re} < 2000: \text{Ne} = 4$$

$$2000 < \text{Re} < 8000: \text{Ne} = 0.7 * \text{Re}^{0.23}$$

$$8000 < \text{Re}: \text{Ne} = 5.5$$

Zum Stabilisieren der Öltröpfen wird ein pflanzliches Protein in der wässrigen Phase gelöst. Die Proteinmoleküle lagern sich mit einer Konzentration von 5 mg/m^2 auf der Oberfläche der Öltröpfen an und senken die Grenzflächenspannung auf 2 mN/m .

- a) Bestimmen Sie für die angegebenen Bedingungen die in die Emulsion eingetragene mechanische Leistung!

Hinweis: Die Viskosität der Emulsion kann mit der Beziehung von EILERS ($K = 1.25$, $c_{V\text{max}} = 0.62$) abgeschätzt werden.

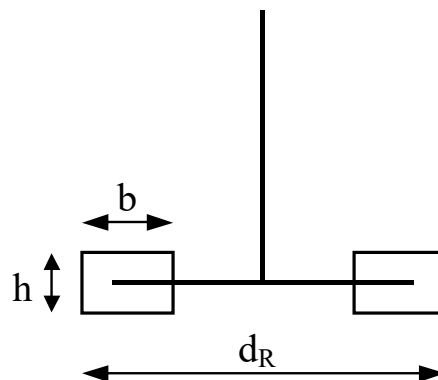
- b) Die Tropfenbildung vollzieht sich im Wesentlichen in unmittelbarer Umgebung des Rührorgans, da dort die Beanspruchungsintensitäten am höchsten sind. Berechnen Sie die massenspezifische Energie-dissipation in dieser Emulgierzone unter den Annahmen, dass i) diese dem Hohlzylinder entspricht, der von den rotierenden Blättern des Scheibenrührers ($b = 0.25 * d_R$, $h = 0.2 * d_R$) beschrieben wird und ii) sämtliche eingetragene Rührerenergie in ihr dissipiert!

- c) Als Ursache für die Tropfenbildung in turbulenten Strömungen werden in erster Linie turbulente Druckschwankungen auf große Tropfen, (d.h.: groß im Vergleich zu den kleinsten existierenden Wirbeln) angesehen. Die Weber-Zahl, die das Verhältnis von Tropfen zerteilenden zu Tropfen zusammenhaltenden Kräften beschreibt, lautet dann:

$$\text{We} = \frac{\rho_{\text{kont}} \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{5}{3}}}{\gamma}$$

Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Durchmesser der größten stabil existierenden Tropfen, wenn die kritische Weber-Zahl 0.3 beträgt! Berechnen Sie zum Vergleich den Längenmaßstab der Mikroturbulenz nach Kolmogorov und kommentieren Sie das Ergebnis!

- d) Welche Massenkonzentration an pflanzlichen Protein in der wässrigen Phase wird mindestens benötigt, wenn der Sauterdurchmesser der Emulsion ca. die Hälfte der in c) berechneten maximalen Tropfengröße beträgt.



Vorgegebene Werte:

Einheiten:	$\mu\text{m} := 10^{-6} \text{ m}$	$\text{mN} := 10^{-3} \text{ N}$	$\text{mPa} := 10^{-3} \text{ Pa}$
wässrige Phase:	$\rho_{\text{WP}} := 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\eta_{\text{WP}} := 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$	
Sonnenblumenöl:	$\rho_{\text{Öl}} := 920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$c_V := 30 \%$	
Grenzfläche:	$\gamma := 2 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	$\Gamma := 5 \cdot \frac{\text{mg}}{\text{m}^2}$	
turb. Tropfenbildung:	$We_{\text{kr}} := 0.3$	$We = \frac{\rho \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot d \cdot T^{\frac{5}{3}}}{\gamma}$	
Rührerabmessungen:	$d_R := 50 \text{ cm}$	$b_B := 0.25 \cdot d_R$	$h_B := 0.2 \cdot d_R$
Leistungscharakteristik:	$Ne(Re) := \begin{cases} \frac{80}{Re} & \text{if } Re < 40 \\ 4 & \text{if } 15 \leq Re < 2000 \\ 0.7 \cdot Re^{0.23} & \text{if } 2000 \leq Re < 8000 \\ 5.5 & \text{if } 8000 < Re \end{cases}$		
Drehzahl:	$n_R := 200 \text{ min}^{-1}$		

Ergänzung:

Viskosität nach Eilers:	$\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{kont}} \cdot \left[1 + \frac{1.25 \cdot c_V}{1 - \frac{c_V}{c_{V\text{max}}}} \right]^2$	$c_{V\text{max}} := 0.62$
-------------------------	--	---------------------------

Lösung:

1. Leistungseintrag des Rührorgans

Rührerleistung: $P = Ne \cdot \rho \cdot n_R^3 \cdot d_R^5$

wobei: $Ne = Ne(Re)$ mit $Re = \frac{\rho \cdot n_R \cdot d_R^2}{\eta}$

Dichte der Emulsion: $\rho_E = \frac{m_{WP} + m_{Öl}}{V_{ges}} = \frac{V_{WP} \cdot \rho_{WP} + V_{Öl} \cdot \rho_{Öl}}{V_{ges}} = (1 - c_V) \cdot \rho_{WP} + c_V \cdot \rho_{Öl}$

$\rho_E := (1 - c_V) \cdot \rho_{WP} + c_V \cdot \rho_{Öl}$ $\rho_E = 976.0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Viskosität n. Eilers: $\eta_E := \eta_{WP} \cdot \left[1 + \frac{1.25 \cdot c_V}{1 - \frac{c_V}{c_{Vmax}}} \right]^2$ $\eta_E = 2.98 \text{ mPa} \cdot \text{s}$

Reynolds-Zahl: $Re := \frac{\rho_E \cdot n_R \cdot d_R^2}{\eta_E}$ $Re = 2.7 \cdot 10^5$

Newton-Zahl: $Ne := Ne(Re)$ $Ne = 5.5$

Rührerleistung: $P_R := Ne \cdot \rho_E \cdot n_R^3 \cdot d_R^5$ $P_R = 6213 \text{ W}$

2. Massenspezifische Energiedissipation

Idee: sämtliche vom Rührer eingetragene mechanische Energie wird in der *Emulgierzone* zur Erzeugung von Turbulenzelementen genutzt

Emulgierzone: das von den rotierenden Blättern des Scheibenrührers beschriebene Volumen

spezif. Energiedissipation: $\varepsilon_{\max} = \frac{P_R}{m_{EZ}}$

Volumen der EZ: $V_{EZ} = \bar{U} \cdot A_Q = \pi \cdot (d_R - b_B) \cdot h_B \cdot b_B$

oder $V_{EZ} = A_{\text{Ring}} \cdot h_B = \frac{\pi}{4} \cdot [d_R^2 - (d_R - 2 \cdot b_B)^2] \cdot h_B = \pi \cdot (d_R - b_B) \cdot h_B \cdot b_B$

$V_{EZ} := \pi \cdot (d_R - b_B) \cdot h_B \cdot b_B$ $V_{EZ} = 14.73 \text{ m}^3$

Masse der EZ: $m_{EZ} := \rho_E \cdot V_{EZ}$ $m_{EZ} = 14.37 \text{ kg}$

spezif. Energiedissipation: $\varepsilon_{\max} := \frac{P_R}{m_{EZ}}$ $\varepsilon_{\max} = 432.3 \frac{\text{W}}{\text{kg}}$

3. Maximale Tropfengröße

Idee: oberhalb der kritischen Weber-Zahl We_{kr} existieren keine stabilen Tropfen

We-Zahl für turb. Emulgieren: $We = \frac{\rho_K \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{5}{3}}}{\gamma} \Rightarrow We_{kr} = \frac{\rho_K \cdot \varepsilon_{max}^{\frac{2}{3}} \cdot d_{max}^{\frac{5}{3}}}{\gamma}$

maximale Tropfengröße: $d_{max} = \left(We_{kr} \cdot \frac{\gamma}{\rho_K} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot \varepsilon_{max}^{-\frac{2}{5}}$

$d_{max} := \left(We_{kr} \cdot \frac{\gamma}{\rho_{WP}} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot \varepsilon_{max}^{-\frac{2}{5}}$

$d_{max} = 16.3 \mu m$

Vgl. mit Kolmogorov-Länge: $l_K = \left(\frac{v^3}{\varepsilon_{max}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\eta_K^3}{\rho_K^3 \cdot \varepsilon_{max}} \right)^{\frac{1}{4}}$

$l_K := \left(\frac{\eta_{WP}^3}{\rho_{WP}^3 \cdot \varepsilon_{max}} \right)^{\frac{1}{4}}$

$l_K = 6.9 \mu m$

Kommentar: Die Größe der kleinsten existierenden Wirbelelemente beträgt ungefähr $5 \cdot l_K$, d.h. im hier betrachteten Fall ca. $35 \mu m$. Die berechneten Tropfengrößen liegen mit $16 \mu m$ deutlich darunter, so dass die der Berechnung zugrunde liegende Annahme relativ großer Tropfen (Trägheitsbereich, Beanspruchung durch turbulente Druckschwankungen) nicht erfüllt ist.

Die tatsächliche Größe der größten stabil existierenden Tropfen hängt im wesentlichen von den viskosen Eigenschaften der kontinuierlichen Phase ab. Im Fall niedrig viskoser Phasen würden die in den laminaren Wirbeln auftretenden Scherkräfte nicht genügen, um eine Tropfenzerteilung zu bewirken; die Tropfengröße läge also am unteren Ende des Trägheitsbereiches der Energiedissipation (ca. $10 \cdot l_K$). Im Fall höher viskoser Phasen könnten hingegen auch die genannten Scherkräfte tropfenzerteilend wirken.

4. Emulgatorbedarf

Emulgatorkonzentration in der wässrigen Phase: $c_m = \frac{m}{V_{WP}} = \frac{\Gamma \cdot S_{Öl}}{(1 - c_V) \cdot V_{ges}} = \frac{\Gamma \cdot S_V \cdot V_{Öl}}{(1 - c_V) \cdot V_{ges}} = \Gamma \cdot S_V \cdot \frac{c_V}{1 - c_V}$

spezifische Oberfläche: $S_V = \frac{6}{d_{ST}} = \frac{6}{0.5 \cdot d_{max}}$

$S_V := \frac{6}{0.5 \cdot d_{max}}$

$S_V = 0.74 \frac{m^2}{cm^3}$

Emulgatorbedarf: $c_m := \Gamma \cdot S_V \cdot \frac{c_V}{1 - c_V}$

$c_m = 1.58 \frac{gm}{l}$