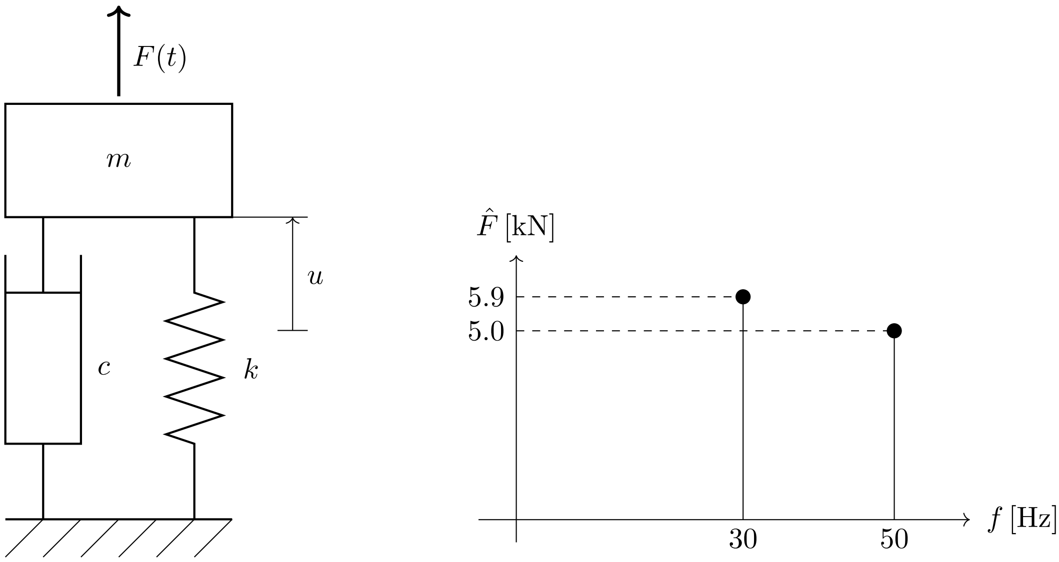
Probeklausur Bodendynamik

Dauer:	120 Min
Aufgaben:	3 *(20+19+18=57 Punkte)*
Hilfsmittel:	handgeschriebene Formelsammlung, mathematische Formelsammlung, Taschenrechner

1 Aufgabe zu den Grundlagen

Ein Blockfundament (Masse $m = 8500\,\mathrm{kg}$) auf Baugrund (äquivalent-lineare Dämpferkonstante $c = 1{,}73\,\mathrm{MN\,s\,m^{-1}}$ und Federsteifigkeit $k = 382\,\mathrm{MN\,m^{-1}}$) wird als Einmassenschwinger (Abbildung links) modelliert.



Das vom Tragwerksplaner, per Fourier-Analyse, ermittelte Anregungsspektrum (Abbildung rechts) beschreibt den Verlauf der anregenden Kraft $F(t)$. Beide Anteile beginnen bei Null, d.h. $F_1(t = 0\,\mathrm{s}) = F_2(t = 0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{N}$.

1. Zunächst sollen Sie die dynamischen Grundeigenschaften des Systems, die sie für eine Auslegung benötigen, ermitteln. Berechnen Sie: ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0, ungedämpfte Eigenfrequenz f_0, Dämpfungsgrad ζ und gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_1. Geben Sie unter Verwendung der berechneten Größen den Verlauf der freien Schwingungen dieses Systems formelmäßig an. *(6 Punkte)*

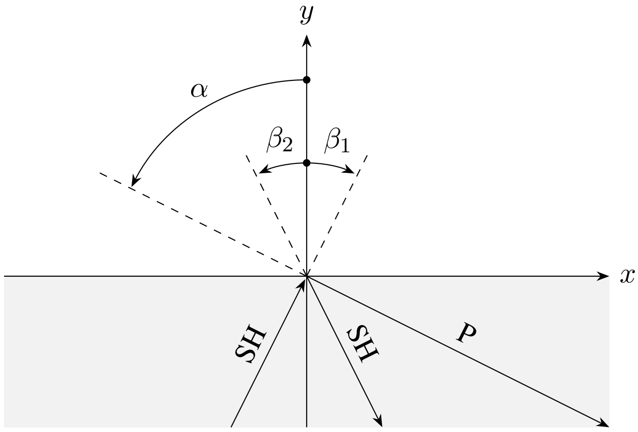
2. Skizzieren Sie den Anregungsverlauf im F-t-Diagramm für zwei Perioden der Grundfrequenz. *(5 Punkte)*

3. Wählen Sie die dominante Anregung aus, begründen Sie ihre Wahl, und berechnen Sie dafür den eingeschwungenen Zustand. *(6 Punkte)*

4. Es wird nun der in der vorherigen Teilaufgabe berechnete, eingeschwungene Zustand betrachtet. Berechnen Sie zur Bewertung der dynamischen Bodenkräfte: die Amplitude der Federkraft, die Amplitude der Dämpferkraft und die Amplitude der Bodenkraft. *(3 Punkte)*

2 Aufgabe zur Wellenausbreitung

In einem linear elastischen, isotropen Kontinuum (Elastizitätsmodul E und Querdehnung ν, alternativ dürfen Sie auch weitere Darstellungen, beispielsweise durch die Wellengeschwindigkeiten c_P und c_S oder durch die LAMEschen Parameter λ und μ, als gegeben annehmen) trifft eine horizontal polarisierte S-Welle $\mathbf{u}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1 A_1 \cos\big(\kappa_1(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - c_\mathrm{S} t)\big)$, darin steht $\mathbf{e}_z = [0,0,1]^\mathrm{T}$ für den Einheitsvektor in z-Richtung und $\mathbf{r} = [x,y,z]^\mathrm{T}$ für den Ortsvektor, auf einen Rand. Dieser Rand $\mathbf{r}_\mathrm{R} = [x,0,z]^\mathrm{T}$ sei spannungsfrei, d.h. $\sigma_{xy}(\mathbf{r}_\mathrm{R},t) = \sigma_{yy}(\mathbf{r}_\mathrm{R},t) = \sigma_{yz}(\mathbf{r}_\mathrm{R},t) = 0$.



Die Ausbreitungsrichtung $\mathbf{n}_1 = [\sin\beta_1, \cos\beta_1, 0]^\mathrm{T}$, Amplitude A_1 und Wellenzahl κ_1 der einfallenden Welle sind vorgegeben. Gesucht sind die reflektierten Wellen $\mathbf{u}_2(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_2 A_2 \cos\big(\kappa_2(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - c_\mathrm{S} t)\big)$ und $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t) = \mathbf{n}_3 A_3 \cos\big(\kappa_3(\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{r} - c_\mathrm{P} t)\big)$ mit den Ausbreitungsrichtungen $\mathbf{n}_2 = [\sin\beta_2, -\cos\beta_2, 0]^\mathrm{T}$ und $\mathbf{n}_3 = [\sin\alpha, -\cos\alpha, 0]^\mathrm{T}$.

1. Die Verschiebungsrichtung $\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1$ der einfallenden S-Welle. *(2 Punkte)*

2. Berechnen Sie den Schubspannungsverlauf $\sigma_{xy}(\mathbf{r},t)$, wie er sich nur infolge der einfallenden Welle, ohne Reflexion, ergeben würde. *(3 Punkte)*

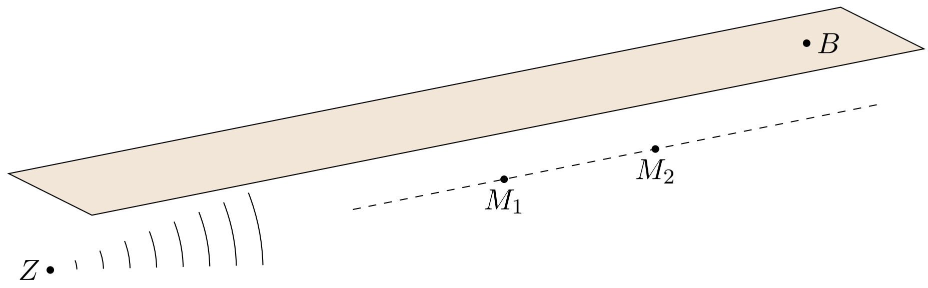
3. Skizzieren Sie den zuvor berechneten Schubspannungsverlauf (einfallende Welle, ohne Reflexion) am Rand $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mathrm{R}$ in zwei Darstellungen: erstens als Zeitverlauf am Koordinatenursprung $\sigma_{xy}(\mathbf{0},t)$ und zweitens entlang der x-Achse zur Zeit null $\sigma_{xy}([x,0,0]^\mathrm{T},0)$. *(6 Punkte)*

4. Bestimmen Sie die Wellenzahlen κ_2 und κ_3, sowie die Reflexionswinkel β_2 und α der reflektierten Wellen so, dass die Randbedingung $\sigma_{xy}(\mathbf{r}_\mathrm{R},t) = 0$ an jedem Punkt des Randes und zu jeder Zeit erfüllt ist. Hinweis: Es ist zulässig, dass Sinuswerte größer als eins auftreten können, ignorieren Sie diese Fälle. *(4 Punkte)*

5. Begründen Sie warum keine vertikal polarisierte S-Welle entsteht. Ziehen Sie dazu die Randspannung $\sigma_{yz}(\mathbf{r}_\mathrm{R},t)$, welche infolge einer reflektierten Welle $\mathbf{u}_4(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z A_4 \cos\big(\kappa_4(\mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{r} - c_\mathrm{S} t)\big)$ mit $\mathbf{n}_4 = [\sin\gamma, \cos\gamma, 0]^\mathrm{T}$ mit $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ entstehen würde, heran. *(4 Punkte)*

3 Aufgabe zu praktischen Anwendungen

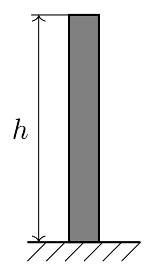
Aus gemessenen Erdbebendaten sollen Informationen gewonnen und für eine Auslegung verwendet werden. Zur Vereinfachung wird der Untergrund als isotrop und homogen angenommen (auch keine Tiefenabhängigkeit).



1. An zwei entlang der Ausbreitungsrichtung gelegenen, unterirdischen Messpunkten M_1 und M_2 wird der Durchgang der P- und S-Wellen registriert. Der räumliche Abstand zwischen den Messpunkten beträgt $1\,\mathrm{km}$.
   - Berechnen Sie die Geschwindigkeiten, c_P und c_S wenn die P-Wellen $2{,}5\,\mathrm{s}$ später am zweiten Messpunkt registriert werden als am ersten. Die S-Wellen brauchen $5{,}0\,\mathrm{s}$ für diese Strecke. *(2 Punkte)*
   - Berechnen Sie aus den Wellengeschwindigkeiten den Schubmodul G und die Querdehnzahl ν, wenn die Bodendichte $\rho = 1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ bekannt ist. *(4 Punkte)*
   - Schätzen Sie unter den Annahmen, dass die geometrische Dämpfung (räumlich) alle anderen abklingenden Einflüsse dominiert, Oberflächeneffekte vernachlässigbar sind und die Messpunkte auf einer Linie mit dem Erdbebenzentrum Z liegen, die Entfernung vom ersten Messpunkt M_1 zum Erdbebenzentrum, wenn Sie am zweiten Messpunkt M_2 eine Amplitudenabnahme $A_2/A_1 = 0{,}99$ in Bezug zum ersten Messpunkt beobachten (gleiche Abnahme für beide Wellenarten). *(2 Punkte)*

2. Anhand der am geplanten Bauort B gemessenen Bodenbeschleunigung wurden die auf der nächsten Seite abgebildeten Zeitverläufe von acht Einmassenschwingern (Eigenperiode $T = 0{,}02\,\mathrm{s} \ldots 2{,}0\,\mathrm{s}$) numerisch berechnet. Zeichnen Sie anhand dieser Verläufe punktweise das Antwortspektrum. *(6 Punkte)*

3. Für die weitere Auslegung wird die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des geplanten Bauwerks benötigt. Folgende Bewegungsgleichung und Randbedingungen

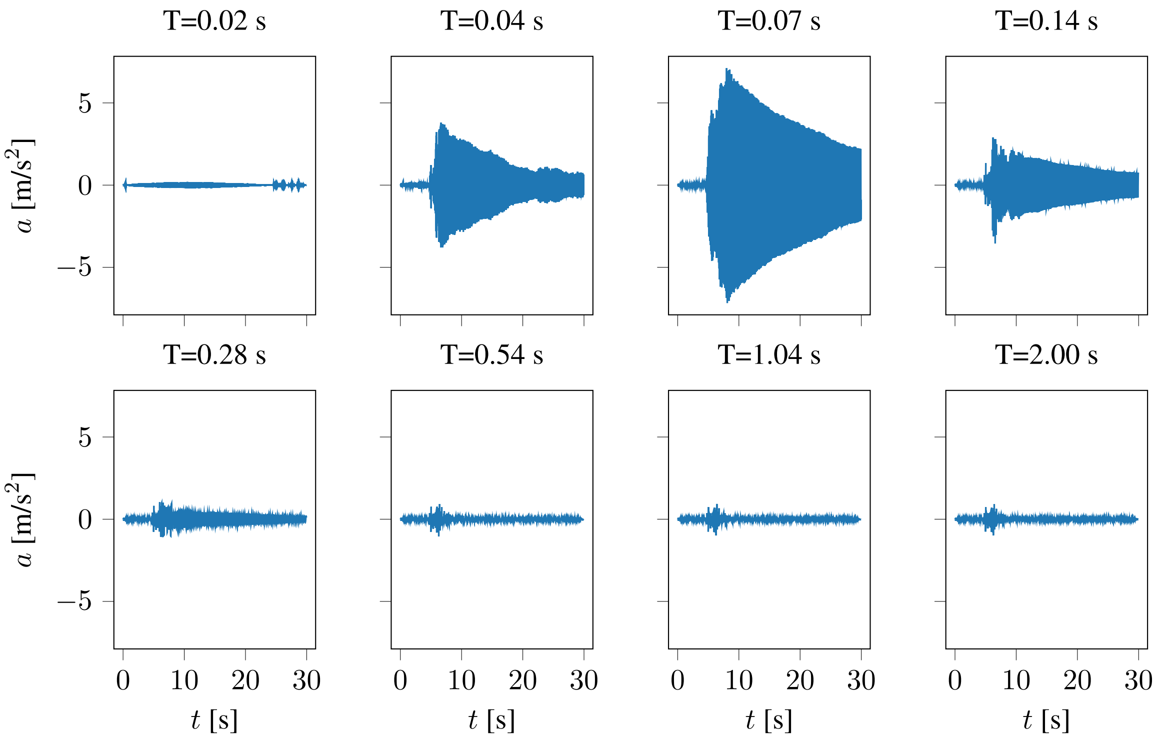


$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$w|_{z=0} = 0$$

beschreiben nährungsweise die Vertikaldynamik dieses Bauwerks (Höhe h, Strukturkonstante $c = \sqrt{E/\rho}$). Der Ansatz $w(t,z) = \sin(\omega t)\sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$ erfüllt bereits die Bewegungsgleichung und eine der Randbedingungen. Bestimmen Sie $\omega = \omega_1 > 0$ so, dass die verbleibende Randbedingung erfüllt ist. Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen sind viele Lösungen möglich, wählen Sie den kleinsten Wert für ω_1. *(4 Punkte)*


T=0.02 s
T=0.04 s
T=0.07 s
T=0.14 s
T=0.28 s
T=0.54 s
T=1.04 s
T=2.00 s
a [m/s^2]
5
0
−5
0
10
20
30
t [s]