

12 Lokale SQP-Verfahren

Nichtlineare Optimierung

WS 2020/21

Quizfrage

Welche der folgenden Optimierungsaufgaben über \mathbb{R}^2 ist ein QP?

☞ sogar eine LP

0 A

Minimiere $x_1 - x_2$
sodass $x_2 - 2x_1 \leq 7$

8 C

Minimiere $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$
sodass $x_2 - 2x_1 = 7$

☞ QCCQP

0 B

Minimiere $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$
sodass $x_2^2 - 2x_1 \leq 7$

1 D

Minimiere $x_1^2 - x_1^2x_2 - x_2^2$
sodass $x_2 - 2x_1 = 7$

QP = Optimierungsaufgabe mit

- Zielfunktion ist Polynom ≤ 2 . Grades
- Nebenbedingungen sind linear (falls vorhanden)

Quizfrage

Warum haben QPs eine besondere Bedeutung in der Optimierung?

Das stimmt leider nicht.

1 A Sie sind explizit lösbar.

5 C Aufgrund der Linearität der Nebenbedingung ist die Existenz Lagrangescher Multiplikatoren immer gesichert.

*ACQ gilt überall
(für alle Aufgaben
mit linearen NB)*

2 B Sie sind das natürliche Analogon zur Minimierung quadratischer Polynome in der unrestringierten Optimierung.

0 D Sie besitzen immer ~~keine~~ Lösung.

*unbeschränkt,
unzulässig können
vorkommen*

Quizfrage

Das lokale Newton-Verfahren in der unrestringierten Optimierung hat zwei verschiedene Motivationen:

1. als Newton-Verfahren zur Lösung der Optimalitätsbedingung 1. Ordnung $\nabla f(x) = 0$
2. als Verfahren der sequentiellen Minimierung quadratischer Polynome.

Wie verhält es sich beim „Lagrange-Newton-“ genannten Verfahren zur Lösung gleichungsbeschränkter Aufgaben?

2 A Es gibt hier ebenfalls diese zwei Interpretationen.

1 B Es gibt hier keine solche Entsprechung.

3 C Das hängt davon ab, ob CQ erfüllt sind.

0 D Wie bitte?

Lokales Lagrange-Newton-Verfahren

Minimiere $f(x)$ unter $h(x) = 0$ (mit C^2 -Funkt.)

1. KKT-Bedingungen

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) \\ h(x) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x) \\ \left. \begin{array}{l} n \\ + \\ p \end{array} \right\} \text{ Gl. für } n+p \text{ unb.} \\ (x, \lambda) \end{array} \right\}$$

Newton-System für Richtung $(\delta x, \delta \lambda)$:

$$\Phi'(x, \lambda) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = -\Phi(x, \lambda) \quad (\text{Indizes weggelassen})$$

$$\text{d.h. } \begin{bmatrix} \underbrace{\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda)}_H & h'(x)^T \\ h'(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Abh. nach x

nach λ

symmetrisch,
i. A. indefinit

$x \rightsquigarrow x + \delta x$

$\lambda \rightsquigarrow \lambda + \delta \lambda$

Lokales SQP-Verfahren

sequential QP

2. Minimiere $\underbrace{\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda)^T d}_{\nabla f(x)^T d} + \frac{1}{2} d^T H d$ }
unter $h(x) + h'(x) d = 0$ }
mit $H = \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda)$

Dazu die KKT-Bedingungen:

Lafrangefkt. $\mathcal{M}(d, \sigma) = \underbrace{\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda)^T d}_{\nabla f(x)^T d} + \frac{1}{2} d^T H d$
 $+ \sigma^T (h(x) + h'(x) d)$

$$\nabla_d \mathcal{M}(d, \sigma) = \underbrace{\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda)}_{\nabla f(x)} + H d + h'(x)^T \sigma = 0$$
$$h(x) + h'(x) d = 0$$

$$d \hat{=} \delta x \quad H \delta x + h'(x)^T \delta \lambda$$

$$\sigma \hat{=} \lambda + \delta \lambda \quad \text{bzw.} \quad = -\nabla f(x) - h'(x)^T \lambda$$
$$= \delta \lambda \quad = -\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda)$$

Lokales SQP-Verfahren mit Ungl.

Minimiere $f(x)$
sodass $g(x) \leq 0$
und $h(x) = 0$

2. Minimiere $\underbrace{\nabla f(x)^T d}_{\text{orange}} + \frac{1}{2} d^T H d$

unter $g(x) + g'(x) d \leq 0$

$h(x) + h'(x) d = 0$

Eine Interpretation als ^{verallgemeinertes} Newton-Verfahren
geht über die Darstellung der KKT-Bedingungen
als ^{verallgemeinerte} Gleichung $\boxed{0 \in \Phi(x, \mu, \lambda)}$.

Quizfrage

Was ist eine wesentliche Voraussetzung für die lokale Konvergenz von SQP-Verfahren?

für „Spätk“ Iterationen

- 1 A alle Ungleichungen sind schließlich inaktiv
- 1 C alle Ungleichungen sind schließlich aktiv

- 4 B hinreichende Bedingungen 2. Ordnung
- 0 D genaue Lösung der QP-Teilprobleme
darf inexakt sein, analog zu inexakten Newton-Verfahren in der unrestrictierten Optimierung

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

→ Benutzen Sie den **Chat**.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2