TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 23. Juni 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

9. Übung: Stetige Verteilungen - Exponentialverteilung

Aufgabe 1

a) Welchen Wert muss die Konstante a haben, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + x) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist?

b) Welche Verteilungsfunktion gehört zu $f(x)$?

c) Skizzieren Sie diese Funktion!

d) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{V}(X)$.

Lösung:

a) Wegen der Beziehung (Normierung eines W-Maßes auf 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,$$

wobei $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ die Verteilungsfunktion von X ist, muss gelten

$$\int_{\infty}^{\infty} a(x^2+x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 a(x^2+x)\mathrm{d}x = a\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5a}{6} \stackrel{!}{=} 1,$$

woraus $a = \frac{6}{5}$ folgt.

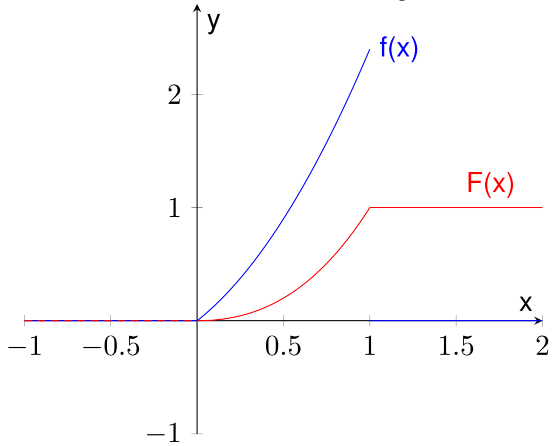
b) Für $x \in [0,1]$ erhalten wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{6}{5}(t^2+t)\mathrm{d}t = \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x^3+3x^2}{5}.$$

Somit ist die Verteilungsfunktion gleich

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0, \\ \frac{2x^3+3x^2}{5} & : 0 \le x < 1, \\ 1 & : x \le 1. \end{cases}$$

c) Plot der Dichte und der Verteilungsfunktion:



d) Für den Erwartungswert gilt

$$\mathrm{E}X = \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\int_0^1 x^3 + x^2 \mathrm{d}x = \frac{6}{5}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{10}.$$

Analog erhalten wir für die Varianz

$$\mathrm{V}X = \mathrm{E}\left[x - \frac{7}{10}\right]^2 = \frac{6}{5}\int_0^1 \left(x^2 - \frac{14}{10}x + \frac{49}{100}\right)\left(x^2 + x\right)\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\int_0^1 x^4 - \frac{4}{10}x^3 - \frac{91}{100}x^2 + \frac{49}{100}x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{6}{5}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{10} - \frac{91}{300}x^3 + \frac{49}{200}x^2\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left[\frac{120 - 60 - 182 + 147}{600}\right] = \frac{1}{20}.$$

Alternativ ist auch eine Berechnung über die ersten beiden Momente möglich:

$$\mathrm{V}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}[X^2 - 2X\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2] = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{54}{100} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{1}{20}.$$

Aufgabe 2

Die Lebensdauer einer Glühlampe sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable X. Bekannt sei, dass im Durchschnitt 75 % der Glühlampen nicht länger als 140 Stunden brennen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glühlampe länger als 250 Stunden brennt!

Lösung: Die Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & : t \geq 0. \end{cases}$$

Hierbei entspricht der Parameter $\lambda > 0$ einer konstanten Ausfallrate. Wir wissen, dass 75% aller Glühlampen nicht länger als 140 Stunden brennen. Aus dieser Information können wir λ berechnen:

$$0.75 \overset{!}{=} \mathrm{P}(X < 140) = F_X(140) = 1 - e^{-140\,\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln(0.25)}{140} \approx 0.0099021.$$

Damit ist die exakte Verteilung von X bekannt und wir können die gesucht Wahrscheinlichkeit ausrechnen:

$$\mathrm{P}(X > 250) = 1 - F_X(250) = e^{-250\,\lambda} = e^{-250\cdot 0.0099021} \approx 0.08412.$$

Aufgabe 3

Die Lebensdauer T eines Gerätes sei exponentialverteilt und es sei **E** $[T] = 1500h$.

a) Wie groß ist die Zuverlässigkeit des Gerätes für eine Woche (7 Tage) ununterbrochene Arbeit?

b) Berechne die L-Werte $L_{90\%}$ und $L_{50\%}$, also die Lebensdauern, die mit 90% bzw. 50% Wahrscheinlichkeit erreicht werden.

c) Berechnen Sie γ aus $L_\gamma = 1500h$.

Lösung:

a) Wir wissen aus der VL (oder sehen durch partielle Integration), dass der Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariablen T gleich

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

ist. In unserem Fall gilt für die durchschnittliche Lebenszeit

$$\bar{T} = \mathbb{E}[T] = 1500,$$

woraus $\lambda = \frac{1}{1500}$ folgt, wobei wir als Zeiteinheit eine Stunde wählen.

Wir sind nun an der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät 7 Tage, also 168 Stunden, lang nicht ausfällt, interessiert. Diese ist gleich

$$\mathrm{P}(T > 168) = 1 - F_T(168) = e^{-\frac{168}{1500}} \approx 0.89404.$$

b) Wir sind an der Lebensdauer des Gerätes interessiert, die mit 90%-iger Sicherheit erreicht wird, d.h. wir suchen $L_{90} > 0$ mit

$$\mathrm{P}(T > L_{90}) = 1 - (1 - e^{-\frac{L_{90}}{1500}}) \stackrel{!}{=} 0.9.$$

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$L_{90} = -1500 \ln 0.9 \approx 158.041,$$

was eine Lebensdauer von $158.041h \approx 6.585$ Tage liefert. Analog folgt aus

$$\mathrm{P}(T > L_{50}) = e^{-\frac{L_{50}}{1500}} \stackrel{!}{=} 0.5.$$

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$L_{50} = -1500 \ln 0.5 \approx 1039.721,$$

was eine Lebensdauer von $1039.721h \approx 43.322$ Tage liefert.

c) Der Wert von γ entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät 1500 Stunden ohne Ausfälle arbeitet, d.h.

$$\gamma = \mathrm{P}(T > L_\gamma) = e^{-1} \approx 0.36788.$$

Aufgabe 4

Gegeben ist ein System, welches als Reihenschaltung im Sinne der Zuverlässigkeit interpretiert werden kann. Folgende Elemente benötigt das System zum einwandfreien Funktionieren:

Elementgruppe	I	II	III	IV
Anzahl der Elemente im System	2	20	5	1
$\lambda(10^{-6}h^{-1})$ für ein Element	0.3	0.01	0	0.5

a) Wie groß sind die L-Werte der Elemente?

b) Wie groß sind λ_{System} und L_{System}?

c) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer des Systems?

Lösung:

a) Wir überlegens uns zunächst die Verteilung von mehreren unabhängigen, exponentialverteilten Zufallsvariablen. Wir bezeichnen dafür die zufällige Lebensdauer von Element i mit $T_i \sim$ Exp(λ_i), wobei $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ gelte. Da wir eine Reihenschaltung im Sinne der Zuverlässigkeit vorliegen haben, ist es für einen störungsfreien Betrieb des Gesamtsystems notwendig, dass alle Bauteile intakt sind. Folglich ist die Lebensdauer des Systems gleich der minimalen Lebensdauer aller Bauteile. Somit gilt für die Lebensdauer X des Systems

$$\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{P}\left(\min_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} T_i > t\right) = \mathrm{P}\left(T_1 > t \wedge \cdots \wedge T_n > t\right).$$

Da die Zufallsvaribalen T_i als unabhängig vorrausgesetzt wurden, können wir dies weiter umformen und erhalten

$$\mathrm{P}\left(T_1 > t\right) \cdots \mathrm{P}(T_n > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(T_i > t\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{-t\lambda_i} = e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}.$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Lebensdauer des Systems exponentialverteilt ist mit Parameter $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, also

$$X = \min_i T_i \sim \text{Exp}\left(\sum_i \lambda_i\right).$$

Wir wenden dieses Resultat nun auf die vier Elementgruppen an:

Baugruppe 1 besteht aus zwei Elementen jeweils mit Ausfallrate 0.3, somit erhalten wir $\lambda_1 = 2 \cdot 0.3 = 0.6$ und folglich

$$\mathrm{P}(X_1 > L) = e^{-0.6L}.$$

In Baugruppe 2 gibt es 20 Elemente mit Ausfallrate 0.01, woraus $\lambda_2 = 20 \cdot 0.01 = 0.2$ und $\mathrm{P}(X_2 > L) = e^{-0.2L}$ folgt. Analog erhalten wir $\lambda_3 = 0$, $\mathrm{P}(X_3 > L) = e^0 = 1$ sowie $\lambda_4 = 0.5$, $\mathrm{P}(X_4 > L) = e^{-0.5L}$.

b) Mit obigen Überlegungen erhalten wir

$$\lambda_{System} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1.3,$$

woraus

$$\mathrm{P}(X > L) = e^{-1.3L}$$

folgt.

c) Aus $\lambda_{System} = 1.3$ folgt $\mathrm{E}X = \frac{1}{1.3} = \frac{10}{13}$. Somit ist die mittlere Lebensdauer gleich $\frac{10}{13} \cdot 10^6 h \approx 87.81$ Jahre.

Aufgabe 5

Die Lebensdauer eines Elementes in einer Maschine sei exponentialverteilt. Für deren Ausfallrate λ in Abhängigkeit von der Belastung B gelte $\lambda_B = B^p \; (p > 1)$.

Wie ändert sich die rechnerische Lebensdauer L, wenn ein Element mit voller Belastung durch zwei Elemente ersetzt wird, die nur mit halber Belastung arbeiten müssen und als Reihenschaltung im Sinne der Zuverlässigkeit interpretiert werden können?

Lösung: Wir betrachten zunächst eine einzelnen Maschine mit Belastung $\lambda_1 \sim B^p$. Für die Lebensdauer mit Wahrscheinlichkeit w gilt

$$\mathrm{P}(X_1 > L_1) = e^{-\lambda_1 L_1} = e^{-B^p L_1} = w.$$

Wir betrachten nun zwei Elemente in Reihe mit jeweils halber Belastung $\frac{B}{2}$. Wie in der letzten Aufgabe ist die Lebensdauer der gesamten Maschine exponentialverteilt mit Parameter

$$\lambda_2 = 2 \cdot \left(\frac{B}{2}\right)^p = \frac{B^p}{2^{p-1}}.$$

Auch für dieses System betrachten wir die Lebensdauer, die wir mit gleicher Wahrscheinlichkeit w erreichen:

$$\mathrm{P}(X_2 > L_2) = e^{-\lambda_2 L_2} = e^{-\frac{B^p}{2^{p-1}} L_2} = w.$$

Wir erhalten eine Aussage über die Beziehungen zwischen den Lebenszeiten L_1 und L_2, indem wir die beiden Ausdrücke gleich setzen und den Logarithmus auf beiden Seiten anwenden:

$$e^{-B^p L_1} = e^{-\frac{B^p}{2^{p-1}} L_2} \quad \Longleftrightarrow \quad -B^p L_1 = -\frac{B^p}{2^{p-1} L_2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{p-1} L_1 = L_2.$$

Insbesondere ist diese Beziehung unabhängig von w, sondern nur von p.