2.2. Partitionszahlen

Beispiel (Partitionen der Zahl n): Wir haben bereits die Zahlen $p(n,k)$ untersucht und wollen jetzt die Anzahl aller Partitionen von n, also P_n berechnen. Eine spezielle Partition von $n = 18$ ist z.B.

$$1+1+1+2+4+4+5.$$

Die liefert einen Anteil zu $p(18,7)$. Wir zerlegen nun diese „unreine" Partition in reine Partitionen, d.h. in Partitionen, die aus lauter gleichen Summanden aufgebaut sind, nämlich

$$(1+1+1)+(2)+(4+4)+(5).$$

Sei $\mathcal{A}$ der Bereich der Partitionen von n, dann können wir allgemein jedes $A \in \mathcal{A}$ als eine Folge von reinen Partitionen darstellen, d.h. $(A_1,\ldots,A_n)$, z.B.

$$A = ((1+1+1),(2),(),(4+4),(5),(),\ldots,()).$$

Führen nun Gewichte $x^{3\cdot 1}, x^{1\cdot 2}, x^{0\cdot 3}, x^{2\cdot 4}, x^{1\cdot 5}, x^{0\cdot 6},\ldots,x^{0\cdot 18}$ ein. Dann ist x^n das Gewicht einer Partition von n das sich offensichtlich auch stets ergibt, wenn man die Gewichte der beteiligten reinen Partitionen miteinander multipliziert, z.B. ist bei der obigen Partition

$$x^{3\cdot 1}\cdot x^{1\cdot 2}\cdot x^{0\cdot 3}\cdot x^{2\cdot 4}\cdot x^{1\cdot 5}\cdots x^{0\cdot 18} = x^{18}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} P(x) &:= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \ldots \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-x^i)} \end{aligned}$$

Dieser Term konvergiert für $|x| < 1$.

Allgemein reicht es zur Bestimmung von p_n jeweils die ersten n Faktoren hinzuschreiben (alle Summanden der Partitionen sind $\leqslant n$) und man kann auch die Reihen in jedem Faktor nach höchstens $n+1$ Summanden abbrechen lassen. Für die p_n ist bis heute keine geschlossenen Formel bekannt, aber

$$p_n = \frac{1}{4n\cdot\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}(1+o(1))$$

(von Hardy und Ramanujan).

Satz 2.5 (Euler-Formel)

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(x^{\frac{3j^2-j}{2}} + x^{\frac{3j^2+j}{2}}\right)} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}+x^{15}+x^{22}-\ldots}, |x| < 1 \end{aligned}$$

Nennen wir die Nennerpotenzreihe $E(x)$, so gilt für $|x| < 1$

$$1 = P(x)E(x) = (p_0 + p_1 x + \ldots)(1 - x - x^2 + \ldots).$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert für

$$\left.\begin{array}{lll}
x^0: & 1 & = p_0 \\
x^1: & 0 & = p_1 - p_0 \\
x^2: & 0 & = p_2 - p_1 - p_0 \\
x^3: & 0 & = p_3 - p_2 - p_1 \\
x^4: & 0 & = p_4 - p_3 - p_2 \\
x^5: & 0 & = p_5 - p_4 - p_3 + p_0 \\
\vdots & \vdots & \\
x^n: & 0 & = p_n - p_{n-1} - p_{n-2} + p_{n-5} + p_{n-7} - p_{n-12} - \ldots
\end{array}\right\} \text{alle Indizes} \geqslant 0!$$

Diese Rekursionsformel ist keine Differenzengleichung.

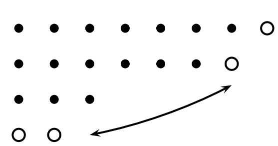
Beweis (der Euler-Formel):

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \left(x^{\frac{3j^2-j}{2}} + x^{\frac{3j^2+j}{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{E(x)}
\end{aligned}$$

Die Funktion $E(x) = \frac{1}{P(x)} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)$ kann als Potenzreihe geschrieben werden. Jede Partition von n mit lauter verschiedenen Summanden liefert beim Ausmultiplizieren des Produktes einen Beitrag zum Koeffizienten von x^n, und zwar zählt jede Partition von n mit einer geraden Anzahl von verschiedenen Summanden als „1" und jede mit einer ungeraden Anzahl von verschiedenen Summanden als „-1". Es gilt also

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (G(n) - U(n)) x^n,$$

wobei G(n) [U(n)] die Anzahl der Partitionen von n mit gerader [ungerader] Zahl von verschiedenen Summanden ist. Der Koeffizient von x^0 ist 1. Für $n \geqslant 1$ versuchen wir nun, die Partitionen von n mit gerader Anzahl von verschiedenen Summanden und die mit ungerader Anzahl einander eindeutig zuzuordnen. Wenn das gelingt, ist $G(n) - U(n) = 0$. Falls $n = \frac{3j^2 \pm j}{2}$ ist bleibt eine Partition übrig und die führt dazu, dass $G(n) - U(n) = (-1)^j$ wird. Wir stellen die Partitionen von n durch Ferrers-Graphen dar, z.B. $n = 18 = 7 + 6 + 3 + 2$:



Allgemein: $n = a_1 + \ldots + a_m$ mit

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_m.$$

Sei j der größte Index mit $a_j = a_1 - j + 1$. Die letzten Punkte der ersten j Zeilen bezeichnen wir als „Diagonale". Im Beispiel ist $j = 2$ und $m = 4$. Nun betrachten wir folgende Operationen:

1. Falls $j < m$, $a_m \leqslant j$ oder $j = m$, $a_m \leqslant j - 1$, entferne die m-te Zeile und füge sie als neue Diagonale an.

2. Falls $j < m$ und $a_m > j$ oder $j = m$ und $a_m > j + 1$, entferne die Diagonale und mache sie zur $(m + 1)$-ten Zeile.

Beide Operationen überführen eine gerade Anzahl von Summanden in eine ungerade und umgekehrt. Die Operationen (1) und (2) schließen einander gegenseitig aus und nach Ausführung einer der beiden sind die Voraussetzungen für die Anwendung der anderen erfüllt.
Der Fall $j = m$ nimmt eine Sonderstellung ein, weil dann die Diagonale und die letzte Zeile einen Punkt gemeinsam haben. Partitionen, auf die beide Operationen nicht anwendbar sind, entstehen, wenn $j = m$ und $a_m = j$ oder $a_m = j + 1$ ist. Hat man $j = m$ und $a_m = j$, so ist

$$\begin{aligned}
n &= j + (j + 1) + \ldots + (2j - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{2j-1} i - \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \frac{2j - 1}{2}(2j - 1 + 1) - \frac{j - 1}{2}(j - 1 + 1) \\
&= \frac{4j^2 - 2j}{2} - \frac{j^2 - j}{2} \\
&= \frac{3j^2 - j}{2}
\end{aligned}$$

Entsprechend führt $j = m$ und $a_m = j + 1$ auf

$$\begin{aligned}
n &= (j + 1) + (j + 2) + \ldots + 2j \\
&= \frac{3j^2 - j}{2} + j \\
&= \frac{3j^2 + j}{2}.
\end{aligned}$$

Man hat also Ausnahmefälle mit j Summanden für $n = \frac{3j^2 \pm j}{2}$, deshalb haben die Potenzen den Koeffizienten $(-1)^j$.

■

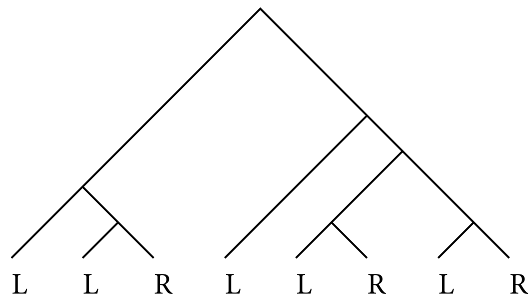
Abschließend noch zwei Identitäten für Partitionen:

1. Die Anzahl der Partitionen mit höchstens n Summanden ist gleich der Anzahl der Partitionen, deren Summanden $\leqslant n$ sind.

2. Die Anzahl der Partitionen mit lauter verschiedenen Summanden ist gleich der Anzahl der Partitionen mit lauter ungeraden Summanden.

2.3. Die Catalanschen Zahlen

Es sei G ein Wurzelbaum mit $n \geqslant 2$ Endknoten (Blättern), dessen Wurzeln den Grad 2 und dessen andere Knoten den Grad 3 haben.



Wir versehen alle Knoten von Grad 3 mit der Markierung „links“ oder „rechts“ so, dass zwei Knoten, die voneinander den Abstand 2 haben und deren Abstände zur Wurzel übereinstimmen, verschiedenen Markierungen erhalten. Einen solchen, so markierten Graphen, nennen wir Catalanschen Baum.
Interpretation: Ein Endknoten r ist genau dann mit „links“ markiert, wenn er links oberhalb des Knotens angebracht ist, der zu r benachbart ist und zur Wurzel einen kleineren Abstand besitzt als r. Entfernen wir aus einem Catalanschen Baum die Wurzel und die mit der Wurzel inzidenten Kanten, so bilden die beiden sich ergebenden Zusammenhangskomponenten jeweils wieder einen Catalanschen Baum, wobei die Wurzeln dieser Zusammenhangskomponenten die Nachbarn der ehemaligen Wurzeln sind.
Umgekehrt können wir auch zwei Catalansche Bäume durch Hinzufügen eines neuen Knotens und zweier Kanten zu einem Catalanschen Baum zusammensetzen.
Die Anzahl Catalanscher Bäume mit n Endknoten (Blättern) ist nun gleich der Anzahl $C(n)$ der verschiedenen Möglichkeiten ein Produkt von n Faktoren zu Klammern. Dem oben gezeichneten Catalanschen Baum mit 8 Endknoten entspricht dabei folgende Klammerung der Faktoren $x_1, \ldots, x_8$:

$$(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot (x_4 \cdot (x_5 \cdot x_6) \cdot (x_7 \cdot x_8)).$$

Es gilt $C(0) = 0$ und $C(1) = 1$. Wir nennen die Zahlen $C(n)$ Catalansche Zahlen. Damit folgt

Satz 2.6
Die Catalanschen Zahlen $C(n)$ *genügen für* $n \geqslant 2$ *der Rekursionsformel*

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} C(k)C(n-k)$$

mit den Anfangsbedingungen $C(0) = 0$ *und* $C(1) = 1$.

Satz 2.7
Die gewöhnlich erzeugende Funktion

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} C(n)x^n$$

genügt der Funktionalgleichung

$$C(x) = x + C(x)^2.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} C(n)x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C(k)C(n-k)x^n \text{ (Satz 2.6)} \\
&= x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C(i)C(j)x^{i+j} \\
&= x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C(i)x^i C(j)x^j \\
&= x + \sum_{i=1}^{\infty} C(i)x^i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} C(j)x^j \\
&= x + C(x)^2
\end{aligned}$$

∎

Die Funktionalgleichung aus Satz 2.7 führt auf die quadratische Gleichung

$$C(x) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right).$$

Nur die Lösung $C(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ genügt der Anfangsbedingung $C(0) = 0$. Damit folgt

Satz 2.8
Für die Catalanschen Zahlen $C(n)$ *ist*

$$C(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

die gewöhnliche erzeugende Funktion.

Entwickeln wir nun $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ in eine Potenzreihe, so erhalten wir

Satz 2.9
Für $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$C(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}.$$

Beweis: Nach dem (erweiterten) Binomischen Satz erhalten wir

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} (-4x)^n.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-4x)^n x}{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \cdot \underbrace{\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{2^n \cdot n!}}_{=1} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

■

Taylorentwicklung:

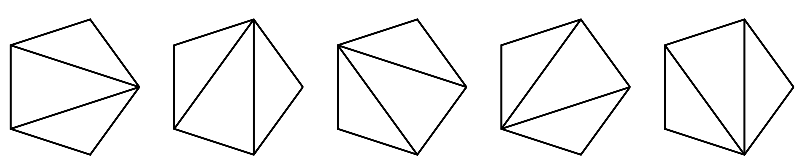
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Catalansche Zahlen:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C(n)	0	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

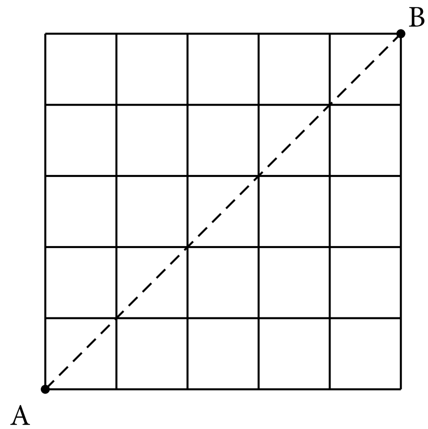
Weitere kombinatorische Deutungen der Catalanschen Zahlen:

(a) $C(n)$ ist die Anzahl der möglichen Triangulationen eines konvexen $(n+1)$-Ecks. So sind beispielsweise die gezeichneten Triangulationen sämtliche Triangulationen eines konvexen 5-Ecks:



(b) Zwei Kandidaten A und B erhalten bei einer Stimmauszählung je $n-1$ Stimmen. Dann gibt es genau $C(n)$ verschiedene Reihenfolgen der Stimmauszählung derart, dass der Kandidat A während der Auszählung nie weniger Stimmen hat als der Kandidat B.

(c) In einem gitterförmigen Stadtplan (Manhattan) mit $n \times n$ Straßen gibt es für einen Taxifahrer genau $C(n)$ verschiedene Wege von A nach B, ohne dabei rechts unter der Diagonalen von A nach B zu fahren.



(d) Durch Drehung des Gitters um $45°$ im Uhrzeigersinn entstehen aus den Fahrtrouten „Bergketten“, die aus je $n-1$ Segmenten der Form „/“ und „\“ zusammengesetzt sind.