

---

## Mathematik für Ingenieure - WS2023/24

### Übungsblatt 13

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Betrachten Sie eine Zufallsvariable  $X$ , welche durch folgende Verteilungstabelle gegeben ist:

|                       |      |      |      |      |      |       |
|-----------------------|------|------|------|------|------|-------|
| $x_i$                 | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | sonst |
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | 1/16 | 4/16 | 6/16 | 4/16 | 1/16 | 0     |

- (a) Handelt es sich bei der Zufallsvariablen  $X$  um eine diskrete oder stetige Zufallsvariable?
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ .
- (c) Stellen Sie die Verteilungstabelle und die Verteilungsfunktion  $F$  grafisch dar.
- (d) Berechnen Sie:  $\mathbb{P}(X < 2)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 2)$ ,  $\mathbb{P}(X > 2)$ ,  $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$  und  $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$ .
- (e) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von  $X$ .

#### Aufgabe 2:

Die Zufallsgröße  $X$  sei standardnormalverteilt, d. h.  $X \sim N(0, 1)$ .

Berechnen Sie unter Benutzung der tabellierten Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung:

- (a)  $P(X < 2.44)$
- (b)  $P(X \geq -1.42)$
- (c)  $P(X < -1.44)$
- (d)  $P(-2.44 \leq X < 2.44)$
- (e)  $P(X \geq 2.04)$

Wiederholen Sie die Aufgabe für eine normalverteilte Zufallsgröße mit  $X \sim N(3, 4)$  unter Umrechnung in die Standardnormalverteilung und Verwendung von  $\Phi$ .

**Aufgabe 3:** Bestimmen Sie anhand der Tabelle für die Verteilungsfunktion einer  $N(0; 1)$ -verteilten Zufallsgröße  $U(\omega)$  die jeweils unbekannte Intervallgrenze.

- (a)  $P(U < a) = 0.5$
- (b)  $P(U < b) = 0.3210$
- (c)  $P(0.15 \leq U < c) = 0.35$
- (d)  $P(-0.22 \leq U < d) = 0.413$
- (e)  $P(-e \leq U < e) = 0.95$
- (f)  $P(|U| \leq f) = 0.4682$
- (g)  $P(U \geq g) = 0.8002$
- (h)  $P(U \geq h) = 0.4010$ .

#### Aufgabe 4:

- (a) Berechnen Sie die Varianz  $\sigma^2$  für eine Zufallsgröße  $X(\omega)$  mit  $X(\omega) \sim N(2; \sigma^2)$ , wenn

$$P(0 \leq X < 4) = 0.68269.$$

- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mu$  für eine Zufallsgröße  $X(\omega)$  mit  $X(\omega) \sim N(\mu; 16)$ , wenn

$$P(X < 7) = 0.3265.$$

**Aufgabe 5:** Ein Automat stellt Wellen her. Der Automat arbeite mit einer Standardabweichung von  $\sigma = 0.5$  mm und ohne systematischen Fehler. Der Automat wurde auf den Wellendurchmesser  $d = 349.8$  mm eingestellt.

Bei der Herstellung werden drei Kategorien von Wellen betrachtet:

$A$  ... Welle ist Ausschuss, wenn  $d < 349.2$  mm

$B$  ... Welle ist normgerecht, wenn  $349.2 \text{ mm} \leq d < 350.5$  mm

$C$  ... Welle ist nachzuarbeiten, wenn  $d \geq 350.5$  mm ist.

Der Durchmesser einer Welle werde als normalverteilt angenommen.

- Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen die Voraussetzung über die Verteilung des Wellendurchmessers zutrifft.
- Berechnen Sie näherungsweise (gerundet auf drei Nachkommastellen) die Wahrscheinlichkeiten für die Kategorien  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit Hilfe der Tabelle für die Standardnormalverteilung einer Zufallsgröße, d. h. mittels  $X(\omega) \sim N(0, 1)$ .
- Ermitteln Sie, wie viele von dreihundert produzierten Wellen durchschnittlich Ausschuss sind.

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 6:** Es gelte  $X \sim N(10, 4)$ . Berechnen bzw. ergänzen Sie:

- |                            |                               |                            |
|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| (a) $F_X(z) = \Phi(\dots)$ | (b) $F_X(5) = \dots$          | (c) $P(X \leq 12) = \dots$ |
| (d) $P(X > 7) = \dots$     | (e) $P(X \leq \dots) = 0.015$ | (f) $\Phi(\dots) = -0.5$   |

*Hinweis:*  $\Phi(\cdot)$  bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

**Aufgabe 7:** Ein Autohersteller gibt bei einem seiner Neuwagen einen CO<sub>2</sub>-Emissionswert von maximal  $123 \text{ g km}^{-1}$  (außerorts) an. Tatsächlich haben Untersuchungen ergeben, dass dieser Wert nicht bei jedem Fahrzeug gleich ist, sondern zufällig und normalverteilt um einen Mittelwert von  $118 \text{ g km}^{-1}$  mit einer Standardabweichung von  $3 \text{ g km}^{-1}$  schwankt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug den angegebenen Emissionswert von maximal  $123 \text{ g km}^{-1}$  überschreitet?
- Welchen (möglichst kleinen und ganzzahligen) Emissionswert kann der Autohersteller in den Fahrzeugdaten angeben, damit dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 nicht überschritten wird?

**Aufgabe 8:** Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie  $a$  so, dass  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Sei nun  $a$  so wie in (a) berechnet und sei  $X$  verteilt mit Dichte  $f$ .

- Berechnen Sie den Median von  $X$ .