



TUBAF

Die Ressourcenuniversität.
Seit 1765.

Bodendynamik

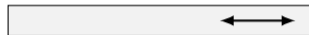
Eindimensionale Wellenleiter

Dominik Kern

24. Mai 2024

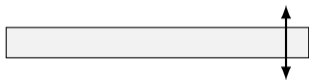
Eindimensionale Strukturmodelle

Dehnstab¹



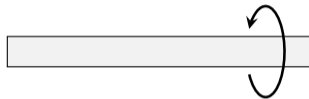
$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Scherstab¹



$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - GA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Torsionsstab¹

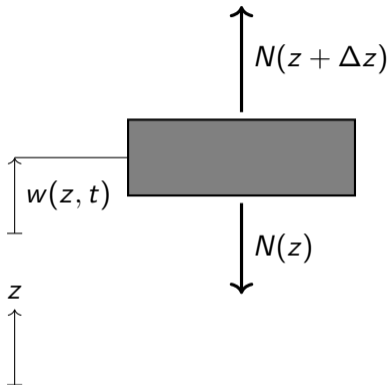


$$\rho I_P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G I_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Allgemein wird diese Gleichung als *Wellengleichung* bezeichnet, mathematisch gehört sie zum hyperbolischen Grundtyp partieller Differentialgleichungen. Sie kommt auch in weiteren Gebieten der Physik vor, z.B. Saitenschwingungen oder Elektrodynamik in einem Leiter (*Telegraphengleichung*).

¹konstante Querschnittseigenschaften

Bewegungsgleichung des Dehnstabs



$$\rho A \Delta z \ddot{w} = N(z + \Delta z) - N(z)$$

$$\rho A \Delta z \ddot{w} = EA w'(z + \Delta z) - EA w'(z)$$

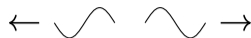
$$\rho \ddot{w} = E w''$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE)

$$\ddot{w} = v^2 w''$$

mit $v^2 = E/\rho$, $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ und $w' = \frac{\partial w}{\partial z}$.

D'Alembertscher Wellenansatz



Sowohl links- als auch rechtslaufende Wellen

$$w^+(z, t) = w_0^+(z + vt),$$

$$w^-(z, t) = w_0^-(z - vt),$$

erfüllen die Wellengleichung

$$\ddot{w} = v^2 w'',$$

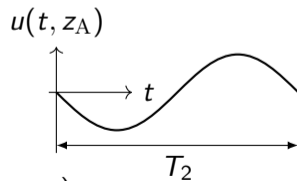
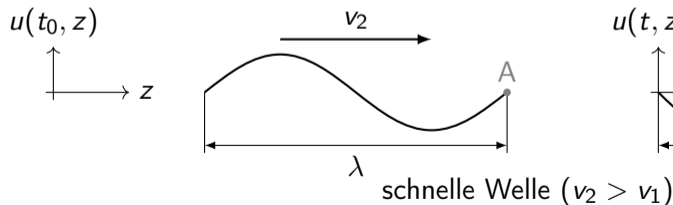
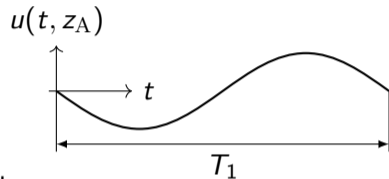
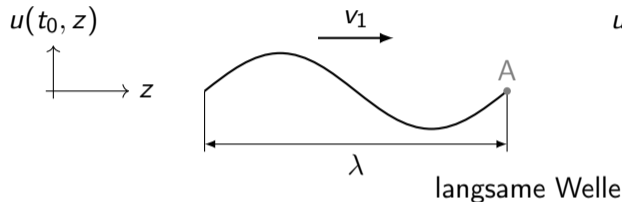
ihre Aufteilung folgt aus den Anfangsbedingungen

$$w_0(z) = w^+(z, t_0) + w^-(z, t_0),$$

$$\dot{w}_0(z) = \dot{w}^+(z, t_0) + \dot{w}^-(z, t_0).$$

Räumlich-zeitliche Ausbreitung

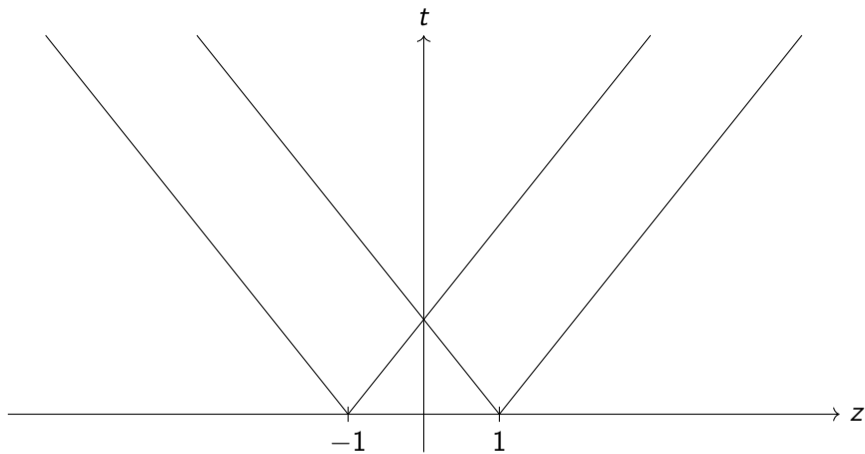
$$u(t, z) = \hat{u} \sin(\kappa z - \omega t) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\kappa}.$$



Beispiel

Anfangsbedingungen: $w_0(z) = \begin{cases} 1, & z \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \dot{w}_0(z) = 0$

Beispiel



Lösungsbereiche im $z-t$ -Diagramm

Häufige Randbedingungen

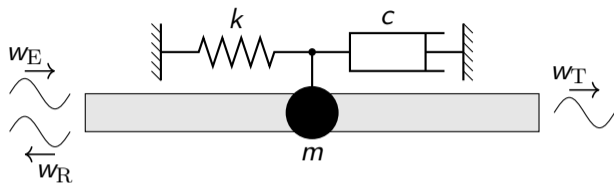
- vorgeschriebene Verschiebung $w(z_R, t) = w_R(t)$
- vorgeschriebene Kraft $EAw'(z_R, t) = F_R(t)$

fester Rand $w(z_R, t) = 0$ an der Stelle $z_R = 0$

Häufige Randbedingungen

- vorgeschriebene Verschiebung $w(z_R, t) = w_R(t)$
- vorgeschriebene Kraft $EAw'(z_R, t) = F_R(t)$

freier Rand $EAw'(z_R, t) = 0$ an der Stelle $z_R = 0$



Die Aufteilung einer einfallenden Welle (rechtslaufend angenommen) $w_E(z, t)$ in reflektierte Welle $w_R(z, t)$ und transmittierte Welle $w_T(z, t)$ ist festgelegt durch Kontinuität in den Verschiebungen und das Kräftegleichgewicht an der Übergangsstelle ($z = 0$)

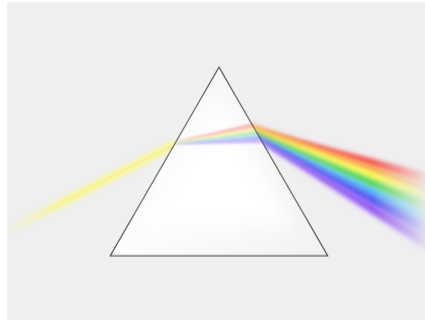
$$w_E(0, t) + w_R(0, t) = w_T(0, t),$$

$$N_E(0, t) + N_R(0, t) = N_T(0, t) - m\ddot{w}_T(0, t) - c\dot{w}_T(0, t) - kw_T(0, t).$$

Dispersion

Frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen

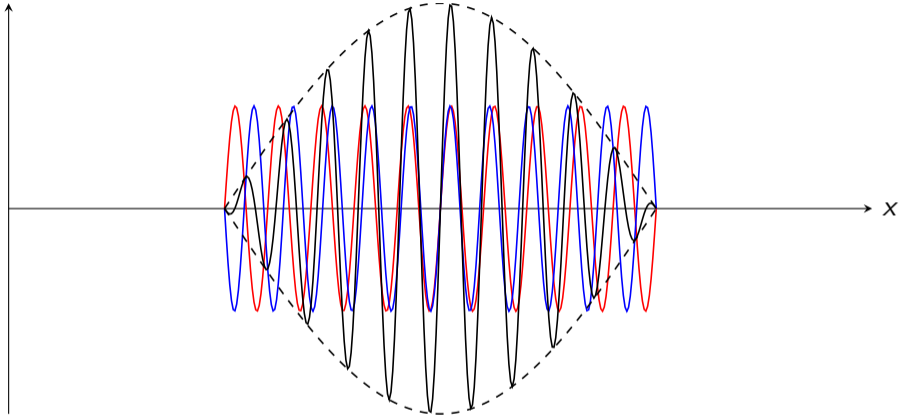
$$f(\kappa, \omega) = 0.$$



Dispersion im Prisma erzeugt ein Farbspektrum [Suidroot]

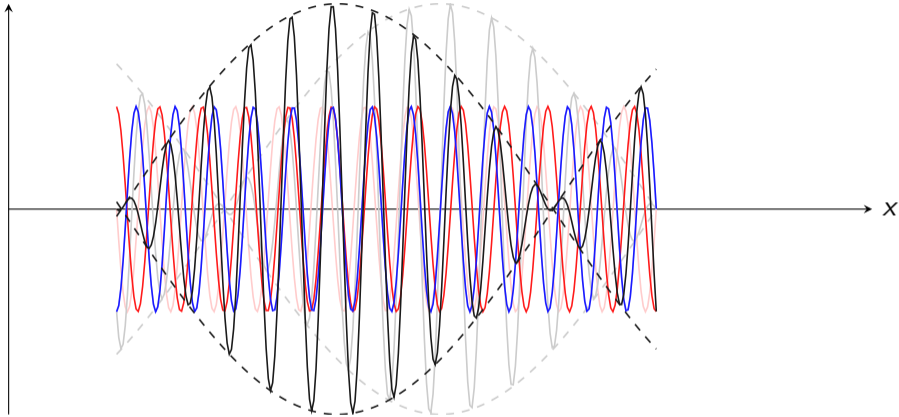
Unterschiedliche Geschwindigkeiten führen zu unterschiedlichen Brechungswinkeln.

Exkurs – Schwebung



Die Überlagerung naheliegender Frequenzen liegt unter einer Einhüllenden

Exkurs – Schwebung



Welle größerer Wellenlänge nach rechts \rightsquigarrow Einhüllende nach links

Dispersion – Konsequenzen

Beliebige Wellenpakete lassen sich durch harmonische Wellen approximieren (siehe Fourier-Transformation), aber wir müssen nun zwischen **Phasengeschwindigkeit** und **Gruppengeschwindigkeit** unterscheiden.

Endlicher Stab

In endlichen Wellenleitern überlagern sich die reflektierten Wellen *passender* Wellenlänge konstruktiv, während sich Wellen anderer Wellenlängen auslöschen. Die verbleibenden stehenden Wellen (Eigenschwingungen) können mittels eines Separationsansatzes bestimmt werden

$$w(z, t) = Z(z)T(t),$$

eingesetzt in die Wellengleichung (partielle Differentialgleichungen)

$$v^2 Z''(z)T(t) = Z(z)\ddot{T}(t),$$

führt er auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\text{const.} = \frac{v^2 Z''(z)}{Z(z)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

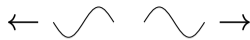
- [Küh23] Anja Kühne. „Damping-induced dispersion in simple waveguides“. In: *GAMM Archive for Students* 5.1 (Mai 2023). DOI: 10.14464/gammas.v5i1.587. URL: <https://www.bibliothek.tu-chemnitz.de/ojs/index.php/GAMMAS/article/view/587>.
- [Ver10] Arnold Verruijt. *An Introduction to Soil Dynamics*. Bd. 47. 12. Dordrecht: Springer Netherlands, Aug. 2010, S. 47–6894–47–6894. ISBN: 978-90-481-3440-3. DOI: 10.1007/978-90-481-3441-0.

Ergänzende Herleitungen und Beispiele

- Lösungstheorie
- Übergangsbedingungen
- Energietransport
- Dispersion
- Einfaches Erdbebenmodell

D'Alembertscher Wellenansatz 1/5

Kanonische Koordinaten und Phasengeschwindigkeit c



$$\xi = z + ct$$

$$\eta = z - ct$$

damit $w(\xi(z, t), \eta(z, t))$ und die Ableitungen

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)$$

D'Alembertscher Wellenansatz 2/5

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

und anschließende Integration nach ξ und dann nach η führt zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \eta} &= \phi(\eta) \\ w &= \Phi(\eta) + \Psi(\xi).\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung besteht aus “einer nach rechts” und “einer nach links laufenden” Funktion.

D'Alembertscher Wellenansatz 3/5

Um die Funktionen zu bestimmen, sind die Anfangsbedingungen, einfachheitshalber zu $t = 0$, auszuwerten

$$\begin{aligned}w_0(z) &= \Psi(z) + \Phi(z), \\ \dot{w}_0(z) &= c\Psi'(z) - c\Phi'(z),\end{aligned}$$

oder nach Integration der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}w_0(z) &= \Psi(z) + \Phi(z), \\ \int_{z_0}^z \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z} + K &= c\Psi(z) - c\Phi(z),\end{aligned}$$

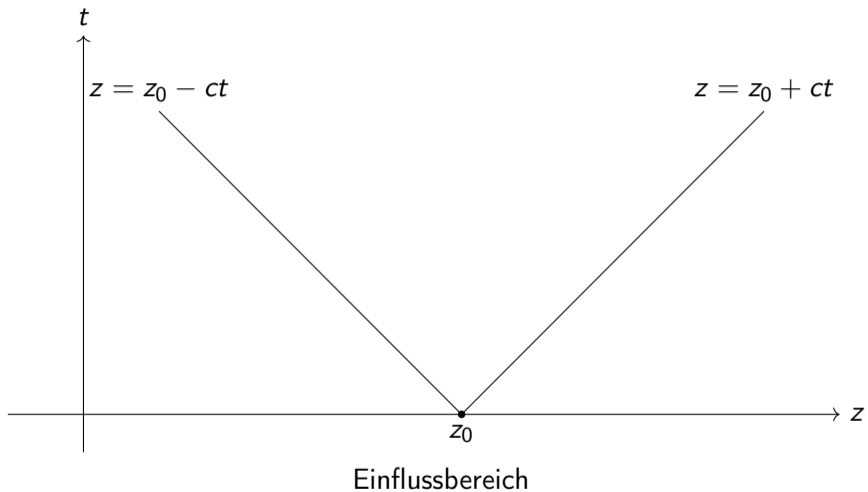
Dieses Gleichungssystem lässt sich algebraisch nach den gesuchten Funktionen auflösen.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}w_0(z) - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z},$$
$$\Psi(z) = \frac{1}{2}w_0(z) + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z},$$

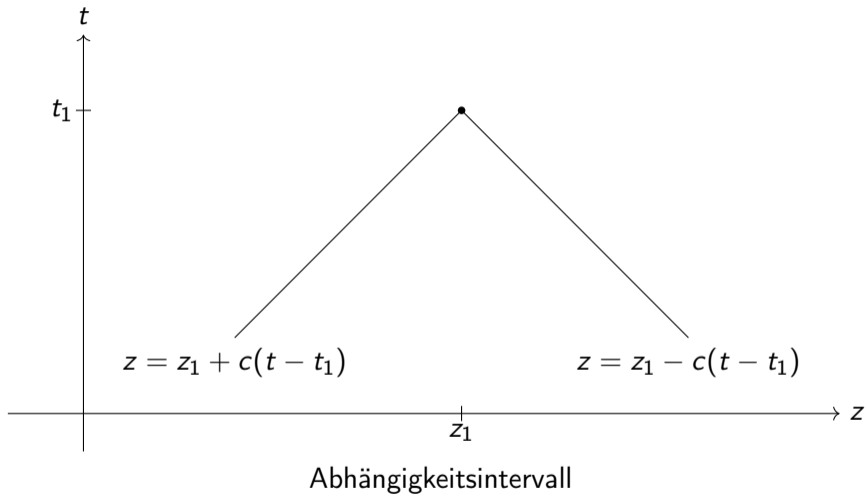
und zurück in den Originalkoordinaten

$$w(z, t) = \frac{1}{2} \left(w_0(z - ct) + w_0(z + ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{z-ct}^{z+ct} \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z}.$$

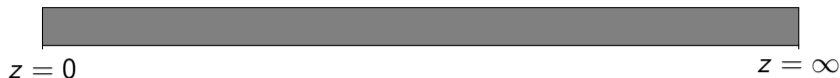
D'Alembertscher Wellenansatz 5/5



D'Alembertscher Wellenansatz 5/5



Halbunendlicher Stab 1/3



$$\Phi(z) = \frac{1}{2}w_0(z) - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}w_0(z) + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z},$$

Für den halbunendlichen Stab brauchen wir

$$\Phi(z - ct) \quad \text{für alle} \quad -\infty < z - ct < \infty$$

$$\Psi(z + ct) \quad \text{für alle} \quad 0 < z + ct < \infty$$

Für $z - ct \geq 0$ greifen wir auf bekannte Anfangsbedingungen zurück und erhalten die D'Alembertsche Lösung, wie für den unendlichen Stab.

Halbunendlicher Stab 2/3

Im anderen Fall $z - ct < 0$ nutzen wir die Randbedingung

$$w(0, t) = \Phi(0 - ct) + \Psi(0 + ct) = 0$$

und erkennen eine *Spiegelung*

$$\Phi(-ct) = -\Psi(ct).$$

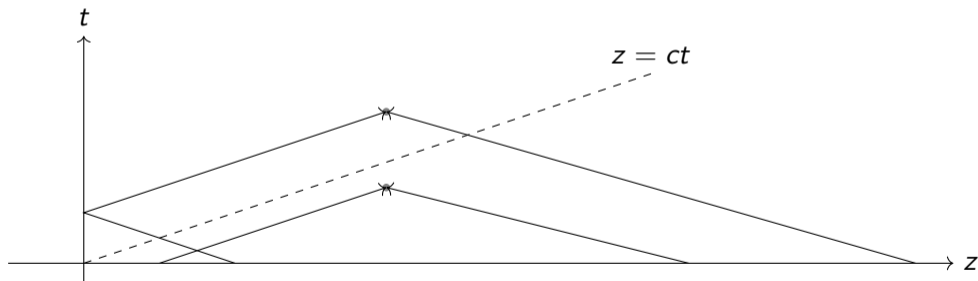
Weil diese Beziehung für alle Zeiten t gilt, lässt sich folgende Ersetzung durch bekannte Größen durchführen

$$\Phi(\underbrace{z - ct}_{<0}) = -\Psi(\underbrace{-z + ct}_{>0}).$$

Halbunendlicher Stab 3/3

Damit lautet das Endergebnis *modifizierte D'Alembertsche Lösung*

$$w(z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(w_0(z - ct) + w_0(z + ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{z-ct}^{z+ct} \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z}, & z \geq ct, \\ \frac{1}{2} \left(-w_0(-z + ct) + w_0(z + ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{-z+ct}^{z+ct} \dot{w}_0(\bar{z}) d\bar{z}, & z < ct. \end{cases}$$



Übergangsbedingungen 1/3



Kinematische ($\dot{w}(h^-) = \dot{w}(h^+)$) und kinetische Kontinuität ($N(h^-) = N(h^+)$) an der Stelle $z = h$

$$\begin{aligned} -c_1 \Phi'_1(z - c_1 t) + c_1 \Psi'_1(z + c_1 t) &= -c_2 \Phi'_2(z - c_2 t), \\ E_1 A_1 \Phi'_1(z - c_1 t) + E_1 A_1 \Psi'_1(z + c_1 t) &= E_2 A_2 \Phi'_2(z - c_2 t). \end{aligned}$$

Aufgelöst nach reflektierter und transmittierter Welle

$$\begin{aligned} \Psi'_1 &= \frac{c_2/c_1 - E_2 A_2 / (E_1 A_1)}{c_2/c_1 + E_2 A_2 / (E_1 A_1)} \Phi'_1, \\ \Phi'_2 &= \frac{2}{c_2/c_1 + E_2 A_2 / (E_1 A_1)} \Phi'_1. \end{aligned}$$

Übergangsbedingungen 2/3

Für einen Stab konstanter Querschnittsfläche $A_1 = A_2 = A$ lauten die Schnelleverhältnisse

$$R_v = \frac{c_1 \Psi'_1}{-c_1 \Phi'_1} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2},$$
$$T_v = \frac{-c_2 \Phi'_2}{-c_1 \Phi'_1} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2},$$

und die Spannungsverhältnisse

$$R_\sigma = \frac{E_1 \Psi'_1}{E_1 \Phi'_1} = -\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2},$$
$$T_\sigma = \frac{E_2 \Phi'_2}{E_1 \Phi'_1} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}.$$

Übergangsbedingungen 3/3

Der Grenzfall sehr kleiner Steifigkeit des anschließenden Abschnitts nähert sich einer Reflexion am freien Rand

$$\lim_{c_2 \rightarrow 0} R_v = 1,$$

$$\lim_{c_2 \rightarrow 0} R_\sigma = -1,$$

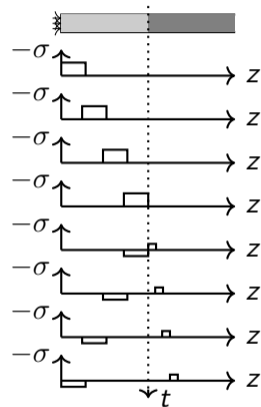
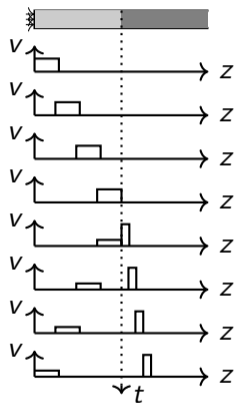
und im Grenzfall sehr hoher Steifigkeit einer Reflexion am festen Rand

$$\lim_{c_2 \rightarrow \infty} R_v = -1,$$

$$\lim_{c_2 \rightarrow \infty} R_\sigma = 1.$$

Beispiel

Reflexion und Transmission beim Übergang von einem Material in ein anderes



$$E_1 = 9E_2, A_1 = A_2, \rho_1 = \rho_2 \text{ [Ver10]}$$

Energiebilanz eines endlichen Abschnitts $[z_1, z_2]$

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = P(z_1, t) - P(z_2, t)$$

$$E_{\text{kin}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dz$$

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \rho A \dot{w} \ddot{w} dz = \int_{z_1}^{z_2} EA \dot{w} w'' dz$$

$$E_{\text{pot}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} EA w'^2 dz$$

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} EA w' \dot{w}' dz$$

Energiebilanz eines endlichen Abschnitts $[z_1, z_2]$

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = P(z_1, t) - P(z_2, t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) &= EA \int_{z_1}^{z_2} \dot{w}w'' + w'\dot{w}' dz \\ &= EA \left| \dot{w}w' \right|_{z_1}^{z_2} + EA \int_{z_1}^{z_2} -\dot{w}'w' + w'\dot{w}' dz \\ &= EA \left| \dot{w}w' \right|_{z_1}^{z_2}\end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Energiebilanz zeigt

$$P(z, t) = -EAw'(z, t)\dot{w}(z, t) = EAc \left(\left(\frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 \right)$$

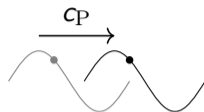
Harmonische Wellen

$$w(z, t) = \hat{w}e^{i(\kappa z - \omega t)}$$

breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit

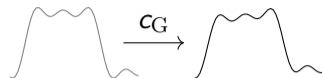
$$c_P = \frac{\omega}{\kappa}$$

aus, wobei eine der beiden Größen, ω oder κ , durch die Dispersionbeziehung bestimmt ist.



Gruppengeschwindigkeit

Für ein Wellenpaket mit Spektrum $W(\kappa)$



$$w(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\kappa) e^{i(\kappa z - \omega(\kappa)t)} d\kappa$$

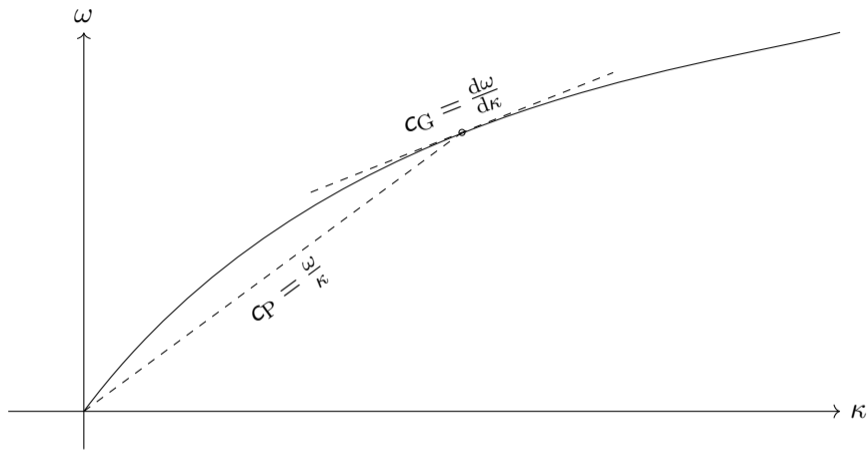
lautet die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \frac{d\omega}{d\kappa},$$

wobei $\omega(\kappa)$ durch die Dispersiongleichung bestimmt ist.

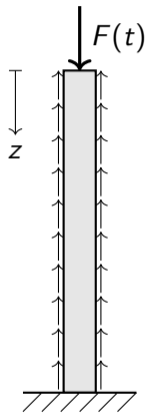
Knobelspaß: Herleitung

Dispersionsbeziehung



Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Dispersion – Beispiel 1/3



Dehnstab mit äußerer, verteilter Steifigkeit [Ver10]

Bewegungsgleichung

$$\rho A \ddot{w} - EA w'' + \frac{EA}{H^2} w = 0$$

$$\ddot{w} - c^2 w'' + \frac{c^2}{H^2} w = 0$$

Harmonischer Wellenansatz

$$w = \hat{w} e^{i(\kappa z - \omega t)}$$

$$w'' = -\kappa^2 \hat{w} e^{i(\kappa z - \omega t)}$$

$$\ddot{w} = -\omega^2 \hat{w} e^{i(\kappa z - \omega t)}$$

Dispersion – Beispiel 2/3

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung

$$\left(-\omega^2 + \kappa^2 c^2 + \frac{c^2}{H^2}\right) \hat{w} e^{i(\kappa z - \omega t)} = 0$$

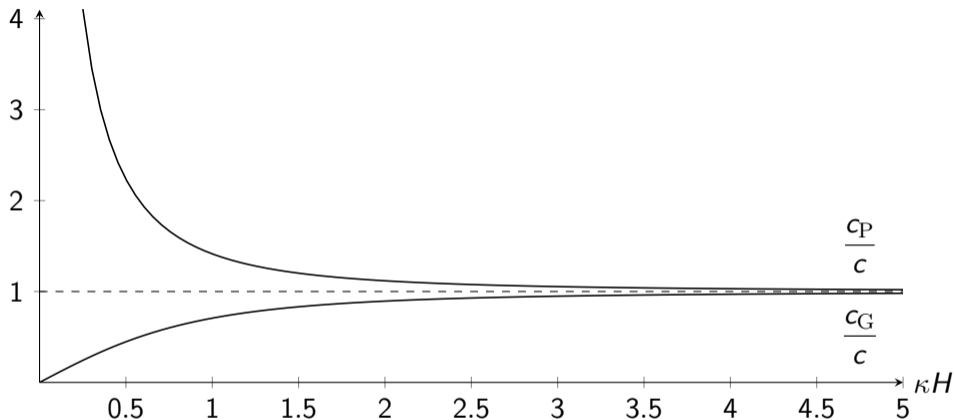
liefert die Dispersionbeziehung

$$\frac{\omega^2}{\kappa^2} = c^2 + \frac{c^2}{\kappa^2 H^2}.$$

Daraus folgen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

$$c_P = c \sqrt{1 + (\kappa H)^{-2}},$$
$$c_G = \frac{c}{\sqrt{1 + (\kappa H)^{-2}}}.$$

Dispersion – Beispiel 3/3



Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Wellenzahl

Dämpfung 1/2

Die Bewegungsgleichung mit **innerer Dämpfung** lautet

$$\rho A \ddot{w} - EA w'' - t_r EA \dot{w}'' = 0,$$

und der Ansatz $w = \hat{w} e^{i(\kappa z - \omega t)}$ liefert die Dispersionbeziehung

$$-\omega^2 + c^2 \kappa^2 - i \omega \kappa^2 t_r c^2 = 0.$$

Die komplexe, frequenzabhängige Wellenzahl

$$\kappa = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1 + i \omega t_r}{1 + \omega^2 t_r^2}} = \pm (\kappa_R(\omega) + i \kappa_I(\omega))$$

beschreibt Dispersion und Abklingen der Wellen [Küh23]

$$w(z, t) = \hat{w}_{\text{left}} e^{i(-\kappa_R(\omega)z - \omega t)} e^{\kappa_I(\omega)z} + \hat{w}_{\text{right}} e^{i(\kappa_R(\omega)z - \omega t)} e^{-\kappa_I(\omega)z}.$$

Dämpfung 2/2

Die Bewegungsgleichung mit **äußerer Dämpfung** lautet

$$\rho A \ddot{w} - EA w'' + \frac{\rho A}{t_r} \dot{w} = 0.$$

Mit dem gleichen Ansatz wie zuvor erhalten wir [Küh23]

$$0 = -\omega^2 + c^2 \kappa^2 - i \frac{\omega}{t_r},$$

$$\kappa = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{i}{\omega t_r}} = \pm (\kappa_R(\omega) + i \kappa_I(\omega)),$$

$$w(z, t) = \hat{w}_{\text{left}} e^{i(-\kappa_R(\omega)z - \omega t)} e^{\kappa_I(\omega)z} + \hat{w}_{\text{right}} e^{i(\kappa_R(\omega)z - \omega t)} e^{-\kappa_I(\omega)z}.$$

Anmerkung: Dämpfung ist meist vernachlässigbar, weil im 3D andere Effekte dominieren (Abklingen durch räumliche Ausbreitung, Dispersion durch tiefenabhängige Elastizität).

Einfaches Erdbebenmodell

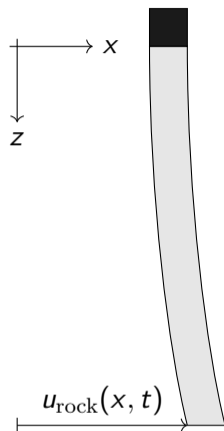
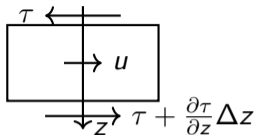


Fig. 3.2 Wave length compared to thickness of layer, $L_2/h = 10$

Bild links: Auflast (dunkelgrau) und weiche Bodenschicht (hellgrau) auf steifem Felsgrund
Bild rechts: Erdbebenwellenlänge im Vergleich zu den Abmessungen [Ver10]

Bewegungsgleichung



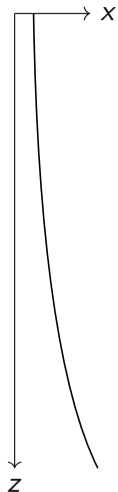
Freischnitt eines infinitesimalen Bodenelements [Ver10]

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \approx \mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{Wellengleichung} \quad \text{☺}$$

Stationärer Zustand 1/2



Ansatz

$$u(x, z, t) = f(z) \sin(\omega t - \kappa_h x)$$

Randbedingungen

$$z = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$z = h : \quad u = u_0 \sin(\omega t - \kappa_h x)$$

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung

$$c^2 f'' + \omega^2 f = 0 \quad \text{Schwingungsgleichung} \quad \text{☺}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(h) = u_0$$

Stationärer Zustand 2/2

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$f'' + \kappa_v^2 f = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa_v = \frac{\omega}{c}$$

lautet (siehe Einmassenschwinger)

$$f(z) = C_1 \cos(\kappa_v z) + C_2 \sin(\kappa_v z).$$

Die Konstanten folgen aus den Randbedingungen

$$-C_1 \kappa_v \sin(0) + C_2 \kappa_v \cos(0) = 0 \quad \leadsto \quad C_2 = 0$$

$$C_1 \cos(\kappa_v h) = u_0 \quad \leadsto \quad C_1 = \frac{u_0}{\cos(\kappa_v h)}$$

Als Endergebnis für den gewählten Ansatz erhalten wir

$$u(x, z, t) = \frac{u_0}{\cos(\kappa_v h)} \cos(\kappa_v z) \sin(\omega t - \kappa_h x).$$

Berücksichtigung von Auflasten



Der dunkle Bereich modelliert ein Gebäude [Ver10]

$$z = 0 : \quad \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \rho d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{diskrete Randmasse}$$

$$u(x, z, t) = u_0 \frac{\cos(\kappa_v z) - d \kappa_v \sin(\kappa_v z)}{\cos(\kappa_v h) - d \kappa_v \sin(\kappa_v h)} \sin(\omega t - \kappa_h x)$$

Berücksichtigung innerer Dämpfung 1/2

Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c^2 t_r \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}$$

und Randbedingungen

$$z = 0 : \quad \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu t_r \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = \rho d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{ohne Auflast} \quad d = 0$$

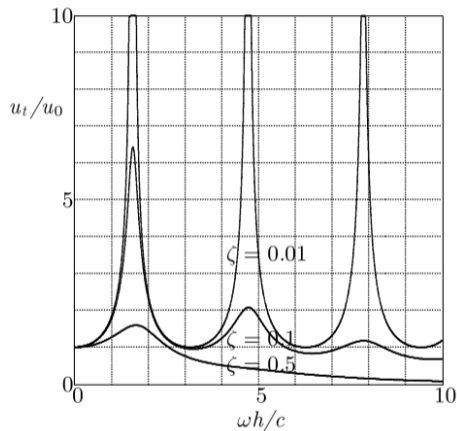
$$z = h : \quad u = u_0 \sin(\omega t - \kappa_h x)$$

Ansatz

$$u(x, z, t) = f(z) \sin(\omega t - \kappa_h x) + g(z) \cos(\omega t - \kappa_h x)$$

Berücksichtigung innerer Dämpfung 2/2

Fig. 3.5 Amplitude of wave at the top of the layer



Relative Verschiebungsamplituden an der Oberfläche in Abhängigkeit der dimensionslosen Anregungsfrequenz für verschiedene Dämpfungsgrade [Ver10]

Berücksichtigung innerer Dämpfung 2/2

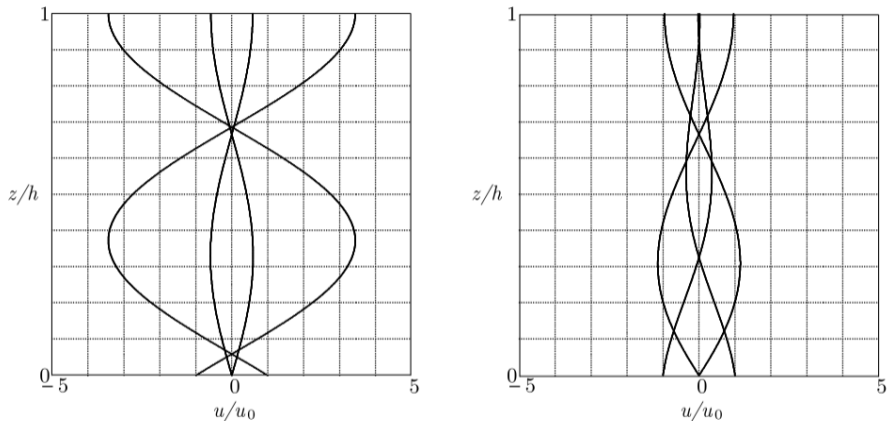


Fig. 3.6 Displacements as a function of depth, $\omega h/c = 5$, $\zeta = 0.01$ and $\zeta = 0.2$

Verschiebungsverläufe zu den dimensionslosen Zeiten $\omega t = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$ [Ver10]

Innere Dämpfung und Auflast

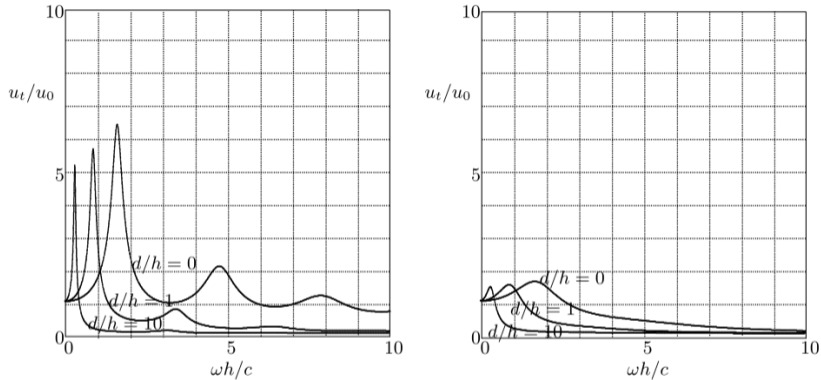


Fig. 3.7 Amplitude of wave at the top of the layer, $\zeta = 0.1$ and $\zeta = 0.5$

Relative Verschiebungsamplituden an der Oberfläche in Abhängigkeit der dimensionslosen Anregungsfrequenz für zwei Dämpfungsgrade und drei Auflasten [Ver10]