

**Mathematik IV (für IF, ET, Ph)**  
Sommersemester 2025

9. Übung: Stetige Verteilungen - Exponentialverteilung

**Aufgabe 1**

a) Welchen Wert muss die Konstante  $a$  haben, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + x) & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße  $X$  ist?

b) Welche Verteilungsfunktion gehört zu  $f(x)$ ?

c) Skizzieren Sie diese Funktion!

d) Berechnen Sie  $E(X)$  und  $V(X)$ .

**Aufgabe 2**

Die Lebensdauer einer Glühlampe sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable  $X$ . Bekannt sei, dass im Durchschnitt 75 % der Glühlampen nicht länger als 140 Stunden brennen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glühlampe länger als 250 Stunden brennt!

**Aufgabe 3**

Die Lebensdauer  $T$  eines Gerätes sei exponentialverteilt und es sei  $\mathbf{E}[T] = 1500h$ .

a) Wie groß ist die Zuverlässigkeit des Gerätes für eine Woche (7 Tage) ununterbrochene Arbeit?

b) Berechne die  $L$ -Werte  $L_{90\%}$  und  $L_{50\%}$ , also die Lebensdauern, die mit 90% bzw. 50% Wahrscheinlichkeit erreicht werden.

c) Berechnen Sie  $\gamma$  aus  $L_\gamma = 1500h$ .

**Aufgabe 4**

Gegeben ist ein System, welches als Reihenschaltung im Sinne der Zuverlässigkeit interpretiert werden kann. Folgende Elemente benötigt das System zum einwandfreien Funktionieren:

Elementgruppe	I	II	III	IV
Anzahl der Elemente im System	2	20	5	1
$\lambda(10^{-6}h^{-1})$ für ein Element	0.3	0.01	0	0.5

a) Wie groß sind die  $L$ -Werte der Elemente?

b) Wie groß sind  $\lambda_{System}$  und  $L_{System}$ ?

c) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer des Systems?

### **Aufgabe 5**

Die Lebensdauer eines Elementes in einer Maschine sei exponentialverteilt. Für deren Ausfallrate  $\lambda$  in Abhängigkeit von der Belastung  $B$  gelte  $\lambda_B = B^p$  ( $p > 1$ ).

Wie ändert sich die rechnerische Lebensdauer  $L$ , wenn ein Element mit voller Belastung durch zwei Elemente ersetzt wird, die nur mit halber Belastung arbeiten müssen und als Reihenschaltung im Sinne der Zuverlässigkeit interpretiert werden können?