



TUBAF

Die Ressourcenuniversität.
Seit 1765.

Übungsaufgaben Bodendynamik – SS 2024

In Überarbeitung – laufende Änderungen möglich

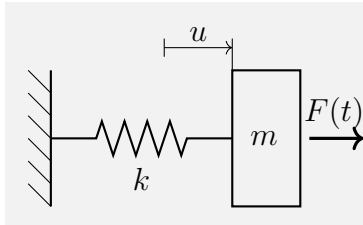
1 Einleitung

1. Suchen Sie nach Nachrichten mit Bezug zur Bodendynamik
2. Suchen Sie nach Videos und interaktivem Material zu bodendynamischen Schlagwörtern

2 Grundlagen

2.1 Einfreiheitsgradschwingungen

3. Erzwungene, ungedämpfte Schwingungen



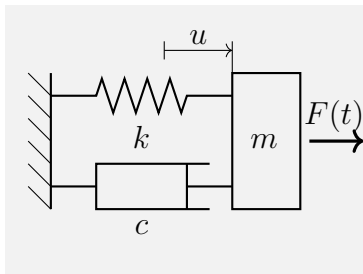
geg.:

- $m = 3 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N m}^{-1}$
- $F(t) = \hat{F} \sin \omega t$, $\hat{F} = 5 \text{ N}$, $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$
- $t_0 = 0 \text{ s}$, $u_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{u}_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$

ges.:

- Eigenkreisfrequenz ω_n
- Zeitverlauf $u(t)$

4. Erzwungene, gedämpfte Schwingungen



geg.:

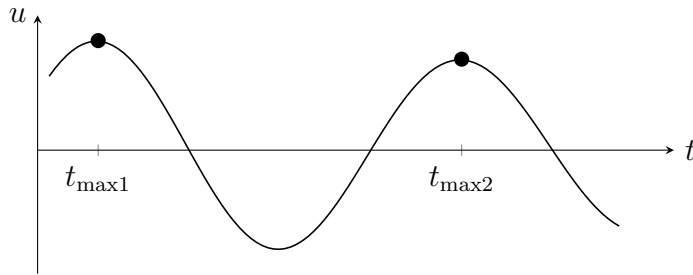
- $c = 1 \text{ N s m}^{-1}$, alle weiteren Parameter so wie in Aufgabe 3 (erzwungene, ungedämpfte Schwingungen)

ges.:

- Dämpfungsgrad D
- eingeschwungenen Zustand $u_p(t)$

Zusatzfrage: Wie ändert sich die Lösung $u_p(t)$, wenn die Anregung einen zusätzlichen Konstantanteil enthält $F(t) = F_{DC} + \hat{F} \sin(\omega t)$?

5. Ausschwingversuch zur Parameteridentifikation



geg.:

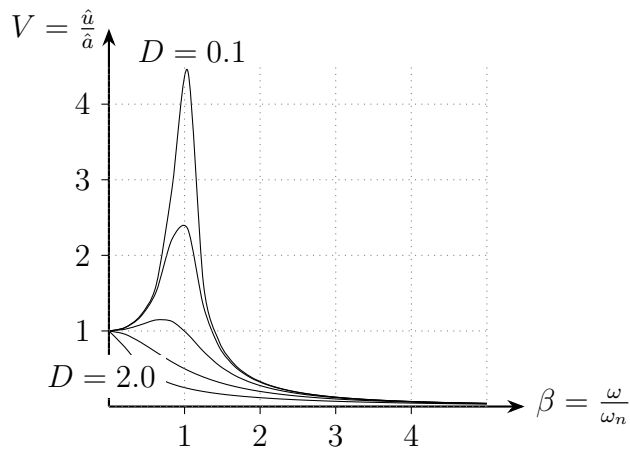
- $m = 3 \text{ kg}$
- $u(t_{\max 1}) = 0.10 \text{ m}, u(t_{\max 2}) = 0.08 \text{ m}$
- $\Delta t = t_{\max 2} - t_{\max 1} = 1 \text{ s}$

ges.:

- Dämpferkonstante c
- Federkonstante k

Hinweis: Nutzen Sie das logarithmische Dekrement $\Lambda = \ln \frac{u(t_{\max 1})}{u(t_{\max 2})}$ als Zwischenergebnis.

6. Schwingsaitenwaage



geg.:

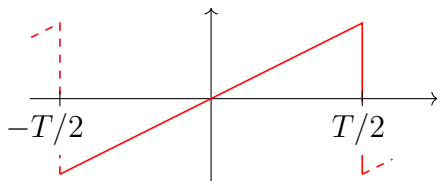
- $m = 3 \text{ kg}$
- $\omega_{\text{gemessen}} = 10 \text{ rad s}^{-1}$
- $D_{\text{gemessen}} = 0.1$

ges.:

- Federkonstante k , für drei Fälle: Die gemessene Frequenz entspricht
 - der ungedämpften Eigenfrequenz,
 - der gedämpften Eigenfrequenz,
 - der die maximale Antwortamplitude hervorrufenden Anregungsfrequenz.

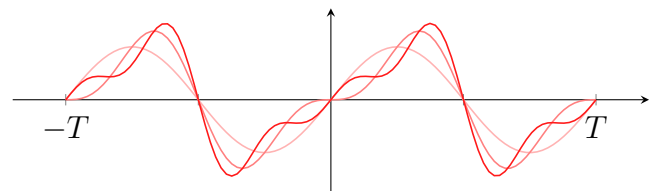
2.2 Frequenzanalyse

7. Periodische Anregung mit Sägezahnverlauf



geg.:

- Einmassenschwinger mit den Parametern aus Aufgabe 4
- Anregung $a(t) = \frac{2a_{\max}}{T}t - nT$ für $nT - \frac{T}{2} < t \leq nT + \frac{T}{2}$
- $T = 1 \text{ s}$, $a_{\max} = 0.1 \text{ m}$

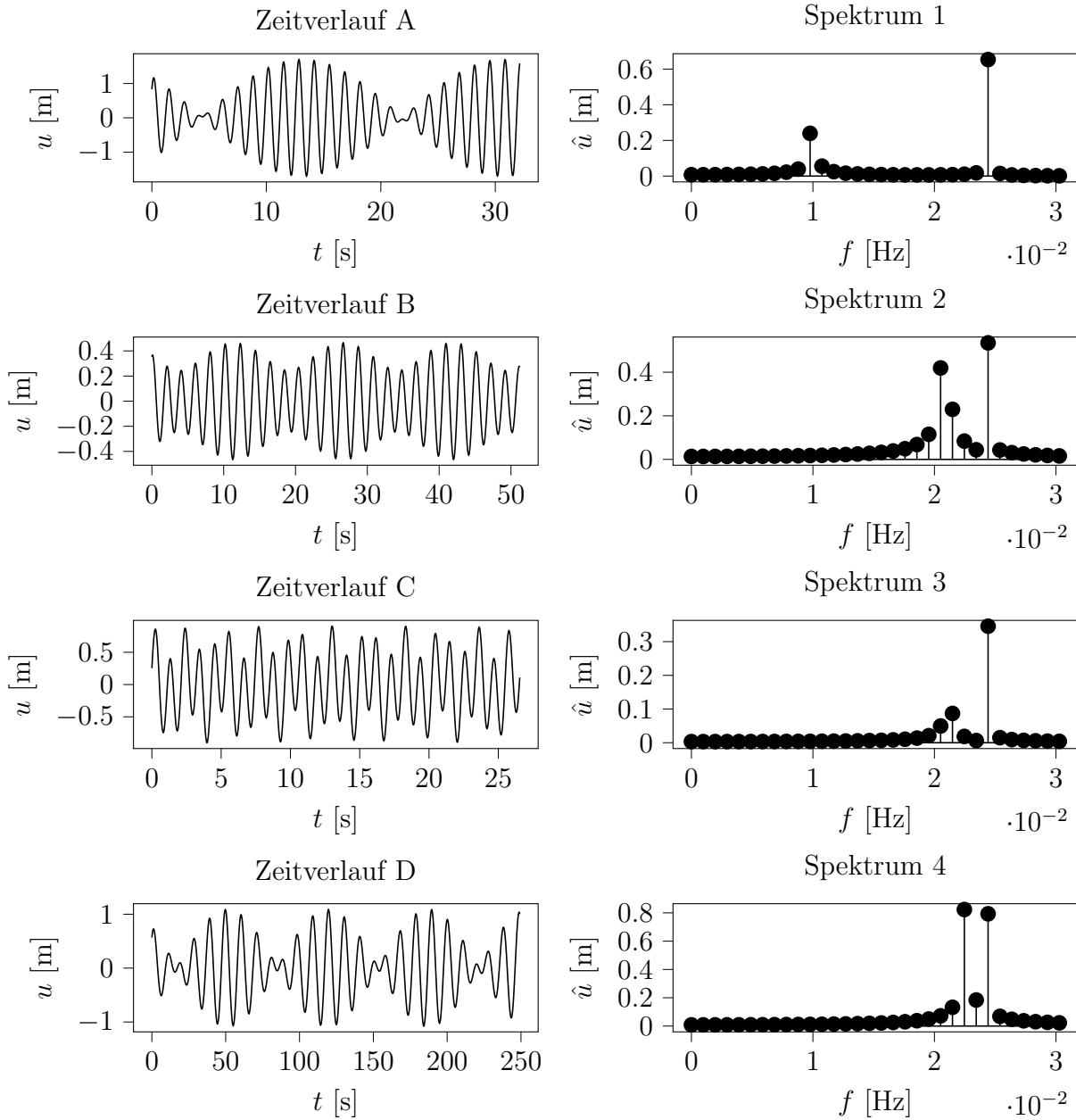


ges.:

- Approximation von $a(t)$ als Fourierreihe bis $K = 2$
- Schwingungsantwort $u_p(t)$ auf die approximierte Anregung (eingeschwungener Zustand)

Zusatzfrage: Wie berechnen Sie die Gesamtlösung bei gegebenen Anfangsbedingungen?

8. Spektren zuordnen



Für weitere Analysen liegen verschiedene Belastungsszenarien in Form von Frequenzspektren vor. Ordnen Sie den abgebildeten Spektren (1–4) die Zeitverläufe (A–D) zu, d.h. geben Sie die passenden Zuordnungen *Buchstabe–Zahl* an.

2.3 Mechanisches Bodenverhalten

9. Dämpfungskapazität des linearen Feder-Dämpferelements

geg.:

$$u(t) = -\hat{u} \cos(\omega t)$$

$$F_D = c\dot{u}$$

$$F_F = ku$$

Hinweis: $\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2}$

ges.:

- Dämpfungsarbeit W_D pro Zyklus
- Maximalwert der während eines Zyklus in der Feder gespeicherten Energie $E_{F\max}$
- Dämpfungskapazität Ψ

10. Schubmodul bei sehr kleinen Dehnungen

geg.:

- $n = 0.5$

- $e = 0.8$

- $I_p = 0.36$

- $p_a = 100 \text{ kPa}$

- $\bar{\sigma}'_0 = 1 \text{ MPa}$

- $\text{OCR} = 5$

- $S = 625$

Hinweis: siehe Kapitel 4.2.2 Grundbau-Taschenbuch [1]

ges.:

- $G_{\max|NC}$

- $G_{\max|OC}$

11. Schubmodulreduktion und Dämpfung bei mittleren Dehnungen

geg.:

$$\hat{\gamma} = 0.5 \%$$

$$I_p = 10 \%$$

ges.:

- $\frac{G}{G_{\max}}$

- D

Hinweis: siehe Kapitel 4.2.4 Grundbau-Taschenbuch [1]

12. Masing-Hypothese

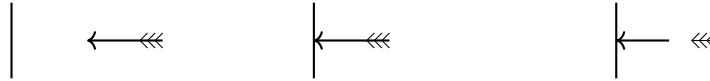
Schlagen Sie die Formeln nach, beispielsweise im Grundbau-Taschenbuch [1] (Kapitel 4.3.2), und skizzieren Sie mit den Parametern $\beta = s = 1$

- die Skelettkurve (punktweise Berechnung) im Intervall $-20 \leq \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_r} \leq 20$,
 - für $\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_r} = 10$ die Hysteresekurve.
-

3 Wellenausbreitung im Untergrund

3.1 Einfache Strukturmodelle (1D)

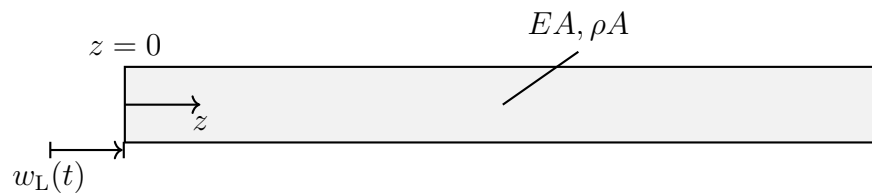
13. Wellenausbreitung im endlichen Stab



Ein Pfeil wird auf eine Zielscheibe geschossen und bleibt stecken. Warum fliegt das Endstück rückwärts weg?

- Skizzieren Sie den Kraft- und Geschwindigkeitsverlauf im Pfeil (Dehnstab) entlang seiner Längskoordinate zu verschiedenen Zeitpunkten.
- Vergleichen sie Ihr Ergebnis mit einer masselosen Feder mit konzentrierter Masse am Ende, die gegen eine Wand fliegt.

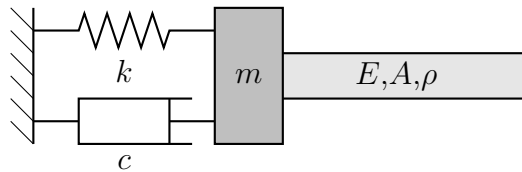
14. Wellenausbreitung im halbunendlichen Stab



Ein Stab ist undeformiert und in Ruhe als zum Zeitpunkt ($t = 0$) die Verschiebungsanregung am linken Rand $w_L(t) = \hat{w}_L \sin(\omega t)$ beginnt. Welches Verschiebungsfeld $w(z, t)$ resultiert daraus?

Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie auf dem gedanklich über den Rand verlängerten Stab eine nach rechts laufende Welle $\hat{w}_L \sin(\kappa(vt - z))$ annehmen, welche genau die vorgegebene Randbewegung erzeugt. Interpretieren Sie die Parameter dieses Verlaufs physikalisch, die Stichwörter sind *Wellenlänge* und *Frequenz*.

15. Diskrete Elemente am Rand



Berechnen Sie das Reflektionsverhalten diskreter Elemente (Feder, Dämpfer, Masse) am Rand ($z = 0$). Nehmen Sie dazu eine einfallende nach links laufende Welle

$$w_{\text{ein}}(z, t) = C_1 \cos(\kappa z + \omega t)$$

an und berechnen Sie die reflektierte Welle

$$w_{\text{ref}}(z, t) = R_1 \cos(\kappa z - \omega t) + R_2 \sin(\kappa z - \omega t)$$

für diese Elemente einzeln, wobei jeweils eine der folgenden Randbedingungen zu erfüllen ist:

$$kw = EA w'$$

Feder-RB

$$c\dot{w} = EA w'$$

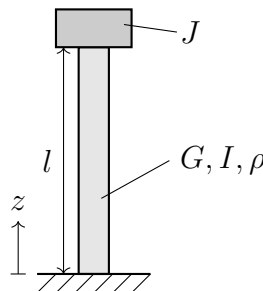
Dämpfer-RB

$$m\ddot{w} = EA w'$$

Masse-RB

Anmerkung: \dot{w} steht für die Ableitung nach der Zeit t und w' für die Ableitung nach der räumlichen Koordinate z .

16. Stehende Wellen



Berechnen Sie die erste Eigenfrequenz eines Resonant-Column Versuchs, wobei die dargestellten Material- und Geometrieparameter bekannt seien. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$\varphi(z, t) = \hat{\varphi} \sin \kappa z \sin \omega t$$

und stellen Sie entweder für κ oder für ω aus der dynamischen Randbedingung am oberen Rand ($z = l$)

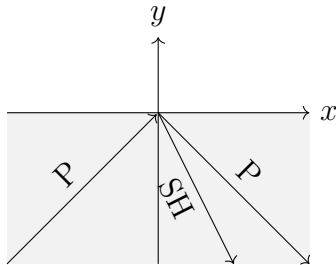
$$J\ddot{\varphi} + GI\varphi' = 0,$$

die Bestimmungsgleichung auf.

Hinweis: $\omega/\kappa = v = \sqrt{G/\rho}$ Kreisquerschnitt $I = I_T = I_P$

3.2 Elastodynamik (3D)

17. Wellenreflexion am freien Rand



geg.:

- linear elastisches, isotropes Kontinuum

- Elastizitätsmodul E ,
- Querkontraktionszahl ν ,
- alternativ auch die Lamé-Konstanten $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

- einfallende P-Welle

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_1 A_1 \sin(\kappa_1(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - v_P t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_1 = [u_1, v_1, w_1]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = [x, y, z]^T$$

- Ausbreitungsrichtung $\mathbf{n}_1 = [\sin \alpha_1, \cos \alpha_1, 0]^T$,
- Amplitude A_1 ,
- Wellenzahl κ_1 .

- freier Rand

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}_R, t) = \sigma_{yy}(\mathbf{r}_R, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_R = [x, 0, z]^T.$$

- reflektierte Wellen (P- und SH-)

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_2 A_2 \sin(\kappa_2(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - v_P t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_2 = [\sin \alpha_2, -\cos \alpha_2, 0]^T,$$

$$\mathbf{u}_3(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_3 A_3 \sin(\kappa_3(\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{r} - v_S t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_3 = [\sin \beta, -\cos \beta, 0]^T.$$

Hinweis: $\mathbf{e}_z = [0, 0, 1]^T$ kennzeichnet den Einheitsvektor in z -Richtung.

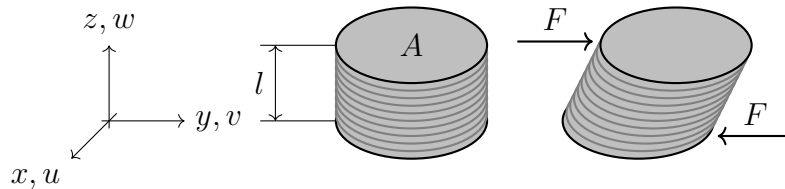
ges.:

- die Randspannung $\sigma_{xy}(x, 0, z, t)$ infolge der einfallenden und der reflektierten Wellen,
- Wellenzahlen κ_2 und κ_3 , sowie die Reflexionswinkel α_2 und β ,
- die Randspannung $\sigma_{yy}(x, 0, z, t)$ infolge der einfallenden und der reflektierten Wellen,
- Amplituden der reflektierten Wellen, A_2 und A_3 .

4 Praktische Anwendung

4.1 Kennwertermittlung

18. Schubmodul (statisch)



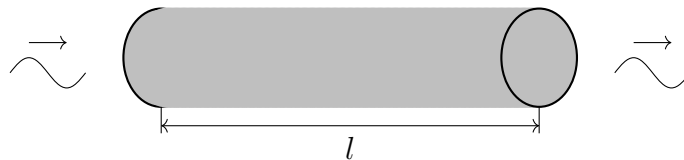
geg.:

- Deformationskinematik
 $[u_1, u_2, u_3]^T = [0, z \tan \gamma, 0]^T$
- Hookesches Gesetz $\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$ und Annahme einer gleichmäßigen Spannungsverteilung $\sigma_{yz} = \text{const.}$ über die Querschnittsfläche A
- $F = 21 \text{ kN}$, $A = 7854 \text{ mm}^2$ und $\gamma = 1^\circ$ (DEG).

ges.:

- linearisierte Verzerrungskomponente (formelmäßig)
 $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)$
- Spannungskomponente σ_{yz}
- Schubmodul G

19. Schubmodul (dynamisch)



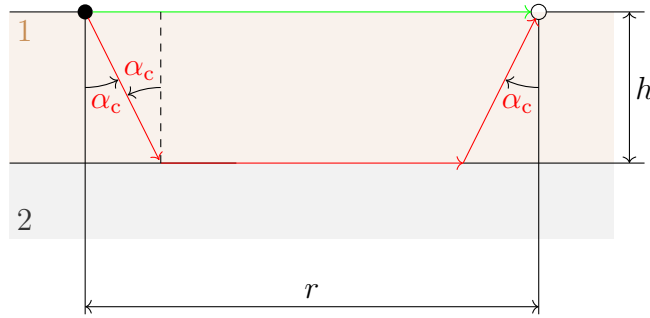
geg.:

- Wellengleichung $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - GA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
- Laufzeit durch die Probe $T = 0.86 \text{ ms}$
- Probengewicht, -länge und -querschnittsfläche, $m = 4 \text{ kg}$, $l = 0.3 \text{ m}$ und $A = 7854 \text{ mm}^2$

ges.:

- Wellengeschwindigkeit v_S
- Dichte ρ
- Schubmodul G

20. Refraktionsseismik



geg.:

- Höhe $h = 9 \text{ m}$
- Abstand $r > 2h$
- Für $r_c = 20 \text{ m}$ brauchen die P-Wellen auf dem direkten Weg (grün) dieselbe Zeit $t = 42 \text{ ms}$ wie auf dem indirekten Weg (rot)
- Handbuchformel

$$h = \frac{r_c}{2} \sqrt{\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}}$$

ges.:

- Wellengeschwindigkeit v_{P1}
- $\tan \alpha_c$ als Funktion $f(v_{P1}/v_{P2})$
- Strecken des indirekten Wegs in den Schichten 1 und 2, $s_1(h, \tan \alpha_c)$ bzw. $s_2(r, h, \tan \alpha_c)$
- v_{P2} mittels Handbuchformel
- Zusatzaufgabe: Herleitung der Handbuchformel

4.2 Konstruktionskriterien

21. Vereinfachte Vertikaldynamik

Das dynamische Verhalten in vertikaler Richtung einer Maschine mit Fundament auf Baugrund (Lehm) soll durch einen Einmassenschwinger angenähert werden.

geg.:

- Maschinenmasse $m_M = 20 \times 10^3 \text{ kg}$
- Fundamentmasse $m_F = 30 \times 10^3 \text{ kg}$ und -fläche $A = 8 \text{ m}^2$
- Schubmodul $G = 180 \text{ MPa}$, Querdehnzahl $\nu = 0.3$ und Dichte $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$ des Bodens

ges.:

- äquivalenter Radius r
- Scherwellengeschwindigkeit v_S im Boden
- Parameter $m_{1\text{DoF}}$, $c_{1\text{DoF}}$ und $k_{1\text{DoF}}$ des reduzierten Modells, sowie Referenzfrequenz f_{ref}

22. Erdbebenbemessungsspektrum

Für ein zweigeschossiges Gastronomiegebäude in Holzbauweise ist für die weitere Auslegung die Erdbebenersatzkraft F_b in horizontaler Richtung aus dem Bemessungsspektrum zu ermitteln. Die Zuordnung der Gebiets-, Bedeutungs- und Untergrundparameter erfolgte nach DIN EN 1998 (Vorgänger DIN 4149).

geg:

- Erdbebenzone 3 $a_{gR} = 0.8 \text{ m s}^{-2}$
- Bedeutungskategorie III $\gamma_l = 1.2$
- Untergrundklasse B-R $S = 1.25$
 $T_B = 0.05 \text{ s}$, $T_C = 0.25 \text{ s}$, $T_D = 2.0 \text{ s}$
- Festigkeitsparameter $\lambda = 1.0$
- Dämpfungskorrekturbeiwert $\eta = 1.0$
- Verstärkungsbeiwert $\beta_0 = 2.5$
- Duktilitätsklasse 1 $q = 1.5$
- Masse: $m = 80 \text{ t}$

ges:

- Maximalen Wert von $S_d(T)$
 - Erdbebenersatzkraft F_b nach DIN 1198
-

23. Immissionsbewertung

Die Erschütterungseinwirkung auf Menschen in Gebäuden ist nach DIN 4150 zu beurteilen (Beispiele C.1 und C.2 in DIN 4150-2).

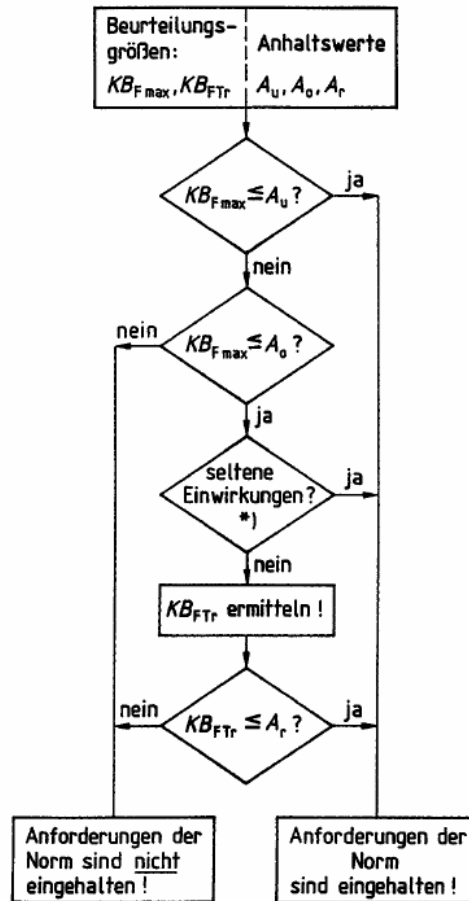


Bild 2 in DIN 4150-2

geg.:

- Sinusförmige Dauereinwirkungen (Frequenz 5 Hz) in horizontaler Richtung (x)
- Einwirkdauer außerhalb der Ruhezeiten $T_{e1} = 8$ h
- $KB_{Fmax} = 0.25$
- $KB_{FTr} = KB_{FTm} \sqrt{\frac{T_e}{T_r}}$ mit $T_r = 16$ h und $KB_{FTm} = 0.23$

ges.:

- Beurteilung innerhalb eines Gewerbegebiets mit den Anhaltswerten $A_u = 0.3$, $A_o = 6$, $A_r = 0.15$.
- Beurteilung innerhalb eines Wohngebiets mit den Anhaltswerten $A_u = 0.15$, $A_o = 3$, $A_r = 0.07$.
Bei welcher Einwirkungsdauer außerhalb der Ruhezeiten sind die Anforderungen der Norm eingehalten?

Anmerkung: Die Ermittlung des KB-Wertes ist in DIN 45669-1 beschrieben.

Literatur

- [1] Christos Vrettos. “Bodendynamik”. In: *Grundbau-Taschenbuch*. Wiley, Apr. 2017, S. 573–631. DOI: 10.1002/9783433607275.ch9.
-