2. Erzeugende Funktionen für kombinatorische Probleme

Grundidee: Einer Folge von (An-)zahlen wird auf kanonische Weise ein einziges (neues) Objekt zugeordnet, eine „ideale“ Datenstruktur, und zwar derart, dass umgekehrt daraus wieder alle Folgeglieder rekonstruiert werden können.
Zu Beispiel 1: Gegeben sei eine endliche Folge von natürlichen Zahlen a_k, die als Anzahlen interpretiert werden, z.B.

k	0	1	2	3	4	5	6-Tupel
a_k	1	4	6	4	1	0	(1,4,6,4,1,0)

Fasse die a_k als Koeffizienten eines Polynoms auf:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k = 1 \cdot x^0 + 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 = (1+x)^4$$

Hieraus kann man umgekehrt alle Koeffizienten zurückgewinnen (man kann allerdings nicht erkennen, wie viele Glieder die Ausgangsfolge hatte, denn auch $(1,4,6,4,1)$ oder $(1,4,6,4,1,0,0)$ führen auf das Polynom $(1+x)^4$)
Voraussetzung für die Wiedergewinnung von Koeffizienten ist, dass jedem Polynom genau eine Folge entspricht. Das garantiert der folgende Satz:

Satz 2.1 (Identitätssatz für Polynome)
Sind

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \textit{ und } B(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

zwei Polynome n*-ten Grades und gilt* $A(x) = B(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*, so stimmen alle Koeffizienten überein, d.h.* $a_k = b_k$*, für* $0 \leqslant k \leqslant n$*.*

Beweis: $A(x) - B(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)x^k \equiv 0$ ist das Nullpolynom. Jedes andere Polynom hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens endlich viele Nullstellen. Also ist $a_k - b_k = 0$, d.h. $a_k = b_k$ für $0 \leqslant k \leqslant n$.

∎

Zur Zurückgewinnung der Koeffizienten des Polynoms

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

bieten sich zwei Methoden an:

1. Taylorentwicklung von $A(x)$ um den Nullpunkt. Wir erhalten
$$a_k = A^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{k!}.$$
2. Wir werten $A(x)$ an $n+1$ paarweise verschiedenen Stellen aus. Das führt auf ein Gleichungssystem mit $n+1$ gesuchten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$.

   Das Gleichungssystem entspricht einer sogenannten Vandermonde-Matrix und ist daher eindeutig lösbar.

Beispiel: $A(x)$ sei bekannt an $n+1$ Stellen, z.B.
$$x = 0, 1, \dots, n.$$
$$\begin{aligned} A(0) &= a_0 \\ A(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ A(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n \\ &\vdots \\ A(n) &= a_0 + na_1 + n^2 a_2 + \ldots + n^n a_n \end{aligned}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(0) \\ A(1) \\ A(2) \\ \vdots \\ A(n) \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Allgemein:
$$V = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$
$$\det V = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \neq 0$$

2.1. Die Fibonacci-Zahlen

Beispiel (Die Fibonacci-Folge): Im Jahre 1202 untersuchte der italienische Mathematiker Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, die Vermehrung von Kaninchenpaaren.
Jedes Paar bringt vom 2. Monat an ein weiteres Kaninchenpaar zur Welt. Im n-ten Monat gebe es f_n Kaninchenpaare:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Die Anzahl f_n setzt sich nämlich zusammen aus den f_{n-1} Kaninchenpaaren, die bereits im $(n-1)$-ten Monat gelebt haben, und den f_{n-2} Paaren, die von den Kaninchen erzeugt worden sind, die schon im $(n-2)$-ten Monat gelebt haben.

Frage: Gibt es eine explizite Formel für die f_n?
Positive Antwort (in Kürze): Dazu Übergang von $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ zur Potenzreihe

$$F(x) := f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

Potenzreihen haben stets einen Konvergenzradius r, der über die Formel von Cauchy-Hadamard berechnet werden kann:

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Für $|x| < r$ konvergiert die Potenzreihe gegen eine Grenzfunktion $A(x)$ und für $|x| > r$ divergiert sie. Für die Fibonacci-Potenzreihe gilt die Abschätzung $r \geqslant \frac{1}{2}$ (mittels Induktion, $f_n < 2^n, n \geqslant 0; f_{n+1} = f_n + f_{n-1} < 2^n + 2^{n+1} < 2^{n+1}$).
Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2 \Rightarrow r \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zur Wiedergewinnung der Koeffizienten gibt es (auch hier) einen Identitätssatz:

Satz 2.2 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Sind

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \textit{ und } B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

zwei konvergente Potenzreihen für $|x| < r$ *(*$r > 0$*) und gilt* $A(x) \equiv B(x)$ *so folgt* $a_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$

Beispiel (exponentiell erzeugende Funktion): Wachsen die Folgenglieder a_n sehr schnell wie z.B. bei $a_n = n!$, so hat die zugehörige Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

den Konvergenzradius $r = 0$ und $A(x)$ ist nur für $x = 0$ sinnvol definiert, zum Beispiel hier etwa $A(0) = 1$.

In solche Fällen verwenden wir anstelle von $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (als gewöhnlich erzeugende Funktion)

$$a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

als exponentiell erzeugende Funktion.

Wir betrachten nun (nur noch) Folgen, die bei der Methode der gewöhnlich erzeugenden Funktionen auf Potenzreihen mit Konvergenzradien $r > 0$ führen, wie z.B. die Fibonacci-Folge. Dabei: Operationen an Folgen $\Leftrightarrow$ Operationen an Potenzreihen.

Satz 2.3
Seien $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ *und* $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ *Folgen, deren zugehörige Potenzreihen* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *einen Konvergenzradius größer als* 0 *haben. Sei* $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. *Dann gilt*

(i) Multiplikation mit einem Skalar λ

$$c_n : a_n \to \lambda a_n \Leftrightarrow C(x) = \lambda A(x)$$

(ii) Summe zweier Folgen:

$$c_n = a_n + b_n, \Leftrightarrow C(x) = A(x) + B(x)$$

(iii) Akkumulation einer Folge (Partialsummenbildung):

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \Leftrightarrow C(x) = \frac{1}{1-x} A(x)$$

(iv) Differenzenfolge:

$$c_0 = a_0, c_n = a_n - a_{n-1}, n > 0 \Leftrightarrow C(x) = (1-x)A(x)$$

(v) Faltung zweier Folgen:

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \Leftrightarrow C(x) = A(x)B(x)$$

(vi) Rechts-Shift:

$$c_0 \textit{ bel. } c_n = a_{n-1}, n > 0 \Leftrightarrow C(x) = c_0 + xA(x)$$

Varianten sind z.B. der doppelte Rechts-Shift

$$c_0, c_1 \textit{ bel. } c_n = a_{n-2}, n > 1 \Leftrightarrow C(x) = c_0 + c_1 x + x^2 A(x)$$

oder der einfache Rechts-Shift mit Vorgabe von c_1:

$$c_0, c_1 \textit{ bel. } c_n = a_{n-1}, n > 1 \Leftrightarrow C(x) = c_0 + c_1 x + x(A(x) - a_0).$$

(vii) Links-Shift:

$$c_n = a_{n+1} \Leftrightarrow C(x) = \frac{1}{x}(A(x) - a_0)$$

(viii) „Derivation“:

$$c_n = n a_n \Leftrightarrow C(x) = xA'(x)$$

(ix) Zweifache Derivation:

$$c_n = n^2 a_n \Leftrightarrow C(x) = xA'(x) + x^2 A''(x)$$

(Bei (vii)-(ix) geht a_0 *verloren, d.h.* a_0 *ist nicht mehr aus* $C(x)$ *rekonstruierbar)*

(x) Integration:

$$c_0 \textit{ bel. } c_n = \frac{1}{n} a_{n-1} \Leftrightarrow C(x) = c_0 \int\limits_0^x A(t)dt$$

Die Gleichungen rechts des Äquivalenzzeichens gelten jeweils in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunktes.

Beweis (Skizze): (i) und

(ii) verifizieren

(iii) Faltung der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mit $A(x)$:

$$\frac{1}{1-x}A(x) = 1a_0 + (1a_1 + 1a_0)x + (1a_2 + 1a_1 + 1a_0)x^2 + \dots$$

(iv)

$$\begin{aligned}(1-x)A(x) &= (1-x)(a_0 + a_1 x + \dots) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots\end{aligned}$$

(v) Cauchy-Produkt(formel) für Potenzreihen:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) &= a_0 b_0 + (a_0 b_0 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} c_0 + xA(x) &= c_0 + a_0x + a_1x^2 + \dots \\ c_0 + c_1x + x^2A(x) &= c_0 + c_1x + a_0x^2 + a_1x^3 + \dots \\ c_0 + c_1x + x(A(x) - a_0) &= c_0 + (c_1 + (a_0 - a_0))x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}(A(x) - a_0) &= \frac{1}{x}(a_1x + a_2x^2 + \dots) \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots \end{aligned}$$

(viii) Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \text{ also} \\ xA'(x) &= 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1x + 2 \cdot a_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

(ix) Zweimalige Anwendung der Derivationsregel ergibt

$$\begin{aligned} C(x) &= x(xA'(x))' \\ &= x(A'(x) + A''(x)x) \\ &= A'(x)x + A''(x)x^2 \end{aligned}$$

(x) Potenzreihen dürfen gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} c_0 + \int_0^x A(t)dt &= c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n. \end{aligned}$$

■

Für die Fibonacci-Folge kann man unter Ausnutzung der (gewöhnlichen) erzeugenden Funktionen eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen herleiten. Dabei verfahren wir wie folgt:

(a) Herleitung einer Funktionsgleichung für $F(x)$ aus der Rekursionsformel der f_n,

(b) daraus folgt eine Formel für $F(x)$ und

(c) durch Reihenentwicklung ergibt sich dann eine Formel für f_n.

Satz 2.4
(a) Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geqslant 2$ *und* $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. *Dann gilt (für kleines* x*):*

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

(b) f_n *ist diejenige ganze Zahl, die*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

am nächsten liegt.

Beweis: (a)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}(f_{n-1} + f_{n-2})x^n.$$

Die Reihe kann mit (ii) und (vi) aus Satz 2.3 berechnet werden. Mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^n \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \\
&= x + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \qquad (f_0 = 0) \\
&= x + xF(x) + x^2F(x) \\
&= x + F(x)(x + x^2)
\end{aligned}$$

(die Konstante c_0 beim Rechts-Shift ist 0 und $c_0 = c_1 = 0$ beim doppelten Rechts-Shift)

Also ist $(1 - x - x^2)F(x) = x$ und daher

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

(b) Partialbruchzerlegung von $F(x)$ führt auf

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} \\
&= \frac{x}{\left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)} \\
&= \frac{A}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{B}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x}.
\end{aligned}$$

Mit $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ergibt sich

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n\right).$$

Die erste Reihe konvergiert für $\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right| < 1$, d.h. für $|x| < \frac{2}{\sqrt{5}+1} \approx 0.618$, und die zweite für $|x| < \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1.618$. Somit konvergiert auch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right) x^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich (erlaubt, wegen Identitätssatz 2.3) ergibt sich

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n + (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right).$$

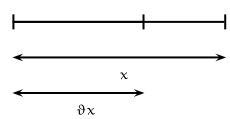
Es ist $\left| f_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ und f_n ist die ganze Zahl, die $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n$ am nächsten liegt.

■

Bemerkung:

- Die Zahl $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist die berühmte Konstante des **goldenen Schnitts**. Eine Strecke (der Länge 1) wird so in zwei Teile zerlegt, das sich das größere Teilstück (der Länge x) zum kleineren Teilstück (der Länge $1-x$) so verhält, wie die Gesamtstrecke zum größeren Teilstück.

  Dieses „Maß“ wurde oft von den alten Griechen und den Renaissance-Baumeistern benutzt.



- Bei der Anordnung von Blütenblättern spielt der goldene Schnitt wie auch in vielen anderen Bereichen der Natur eine zentrale Rolle.

- Die Fibonacci-Reihe hat den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\vartheta} \approx 0.618.$$

- Die Rekursionsformel der Fibonacci-Zahlen ist Spezialfall einer linearen Differenzengleichung, die durch r Anfangswerte $f_0, \dots, f_{r-1}$ und das Gleichungssystem

$$c_0 f_n + c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \ldots + c_r f_{n-r} = a_{n-r} \text{ für } n \geqslant r$$

  gegeben ist. (siehe Anhang)