
Optimierung für Mathematiker/innen

Übung 12

Aufgabe 49: Eigenschaften der Richtungsableitung

Beweise Lemma 13.11 aus der Vorlesung.

Aufgabe 50: Operationen auf Kegeln

Beweise (e) und (f) von Satz 14.3 aus der Vorlesung (Operationen auf Kegeln).

Aufgabe 51: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$A_1 = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1)\},$$

$$A_2 = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) \neq 0\},$$

$$A_3 = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 2\},$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, |x - 1| \leq y\}.$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.

Hinweis: $C([0, 1], \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Werten in \mathbb{R} .

Aufgabe 52: Eigenschaften des Kegels der zulässigen Richtungen

Beweise Lemma 14.6 aus der Vorlesung.

Aufgabe 53: Eigenschaften des Polarkegels und ein Beispiel

(a) Skizziere den Polarkegel zu

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ (3, 1)^\top \right\}.$$

(b) Beweise Lemma 14.11 aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 27: Grafische Darstellung einiger Polarkegel

Betrachte folgende Mengen im \mathbb{R}^2 :

- (a) $M_1 = \{(-1, -1)\} \cup \{(1, 1)\}$,
- (b) $M_2 = \text{conv}(\{(1, 2), (-1, 2), (0, 1)\})$,
- (c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 \leq 1\}$.

Stelle die Polarkegel dieser Mengen dar.

Hausaufgabe 28: Polarkegel der konischen Hülle

Gegeben seien die Vektoren $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$\text{cone}\{x_1, \dots, x_m\} := \left\{ y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

wird als (abgeschlossene, konvexe) *konische Hülle* bezeichnet. Zeige: der Polarkegel zu $K = \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$ ist $K^\circ = \{s \in \mathbb{R}^n : s^\top x_j \leq 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$.

Hausaufgabe 29: Einige Polarkegel

Bestimme zu folgenden konvexen Kegeln den jeweiligen Polarkegel.

- (a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$
- (b) Lorentzkegel $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq t\}$
- (c) symmetrisch positiv semidefinite Matrizen $\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succeq 0\}$ als Teilmenge von $\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^\top = X\}$

Hinweise:

- Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist das kanonische Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij}$. Verwende dieses Skalarprodukt in Teil (c).
- Es gilt $\langle A, BC \rangle = \langle AC^\top, B \rangle$ (für passende Dimensionen).
- Für jede symmetrischen Matrix $X \in \mathcal{S}^n$ existiert die Spektralzerlegung. D.h. sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von X und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, dann gilt $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\top$.