



TUBAF

The University of Resources.
Since 1765.

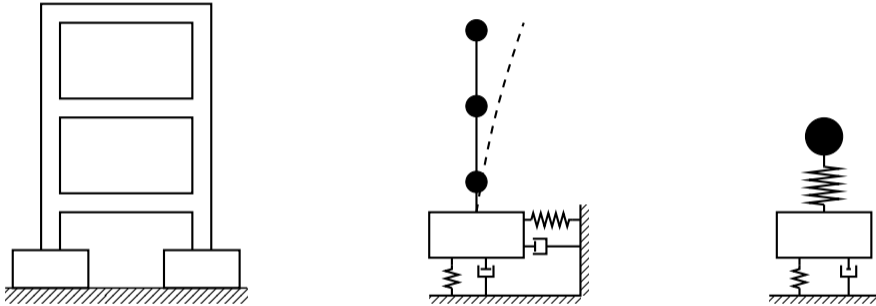
Bodendynamik

Dominik Kern

April 8, 2024

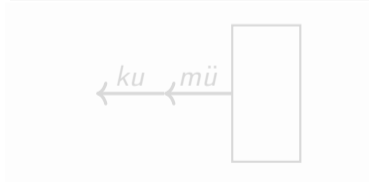
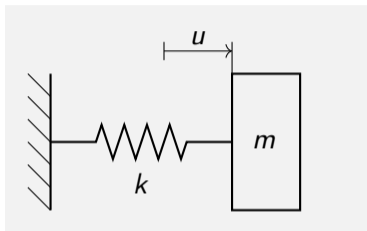
Einmassenschwinger

Einmassenschwinger



Verschiedene Modelle eines Gebäudes auf Baugrund [Hau86]

Freie Schwingungen, ungedämpft



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

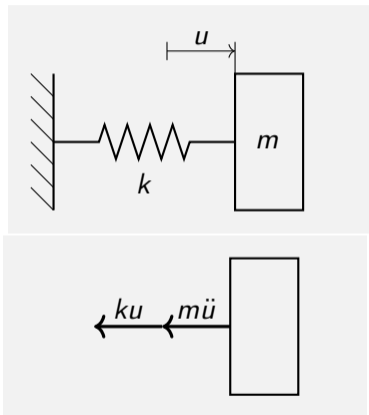
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

Freie Schwingungen, ungedämpft



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

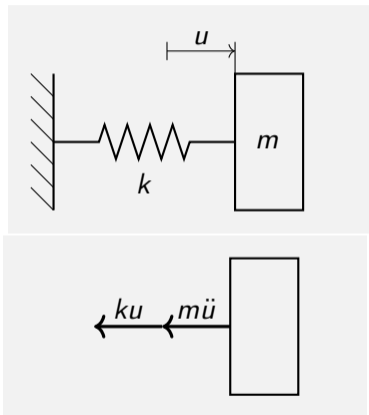
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

Freie Schwingungen, ungedämpft



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

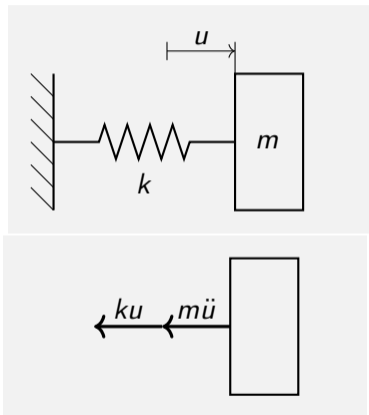
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

Freie Schwingungen, ungedämpft



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

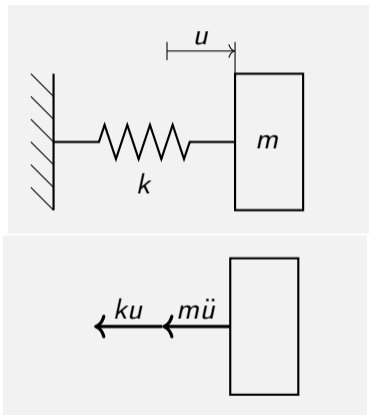
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

Freie Schwingungen, ungedämpft



Modell und Freischnitt

Bewegungsgleichung

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

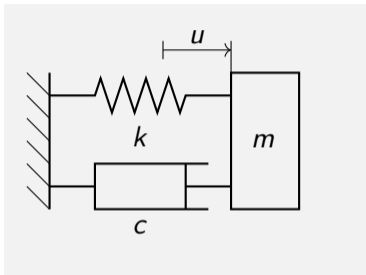
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Lösung

$$u(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t$$

mit B_1, B_2 aus $u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$

Freie Schwingungen, gedämpft 1/4



Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

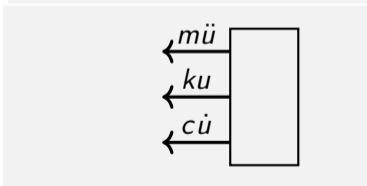
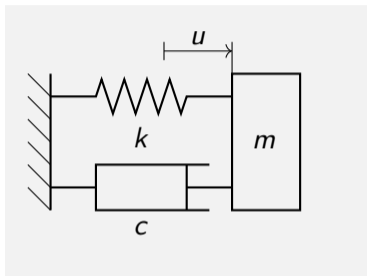
Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Freie Schwingungen, gedämpft 1/4



Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

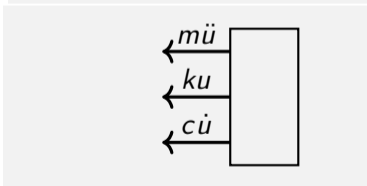
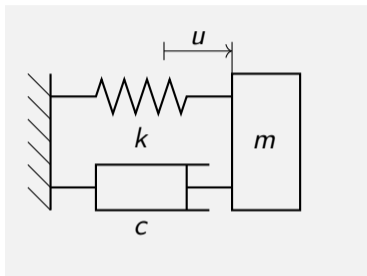
Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Freie Schwingungen, gedämpft 1/4



Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

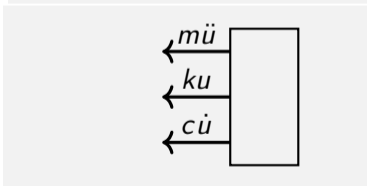
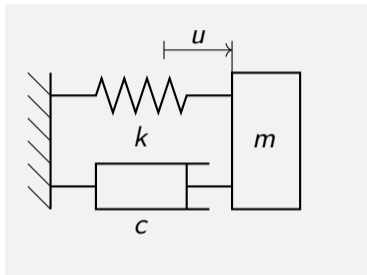
Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Freie Schwingungen, gedämpft 1/4



Bewegungsgleichung

$$-ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$u(t_0) = u_0$$

$$\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$$

Gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten \rightsquigarrow
Exponentialansatz $u(t) = Ae^{rt}$ \rightsquigarrow charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2D\omega_n r + \omega_n^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow r_1, r_2 = -D\omega_n \pm \omega_n \sqrt{D^2 - 1}$$

Freie Schwingungen, gedämpft 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n (D - \sqrt{D^2 - 1}) t} + A_2 e^{-\omega_n (D + \sqrt{D^2 - 1}) t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_D t + B_2 \sin \omega_D t)$$

mit $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{rt} = (A_1 + A_2 t) e^{-D\omega_n t}$$

Herleitung ist **Knobelspaß**, Hinweis *mehrfache Nullstellen!*

Freie Schwingungen, gedämpft 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n (D - \sqrt{D^2 - 1}) t} + A_2 e^{-\omega_n (D + \sqrt{D^2 - 1}) t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_D t + B_2 \sin \omega_D t)$$

mit $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{rt} = (A_1 + A_2 t) e^{-D\omega_n t}$$

Herleitung ist **Knobelspaß**, Hinweis *mehrfache Nullstellen!*

Freie Schwingungen, gedämpft 3/4

- $D^2 > 1$ überkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_2 < r_1 < 0$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{-\omega_n (D - \sqrt{D^2 - 1}) t} + A_2 e^{-\omega_n (D + \sqrt{D^2 - 1}) t}$$

- $D^2 < 1$ unterkritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1 = \bar{r}_2$

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_D t + B_2 \sin \omega_D t)$$

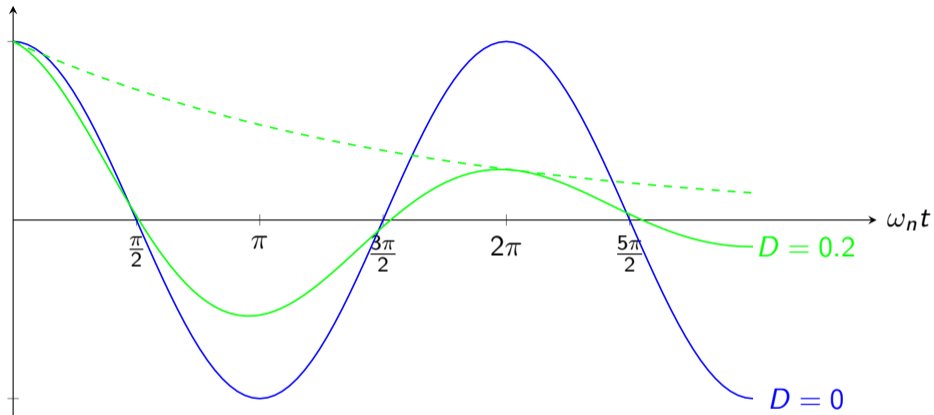
mit $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ und $\delta = D\omega_n$, Herleitung siehe Anhang.

- $D^2 = 1$ kritisch gedämpft: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1 = r_2 < 0$

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{rt} = (A_1 + A_2 t) e^{-D\omega_n t}$$

Herleitung ist **Knobelspaß**, Hinweis *mehrfache Nullstellen!*

Freie Schwingungen, gedämpft 4/4



Zeitverlauf bei unterkritischer Dämpfung

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 1/2

Bewegungsgleichung

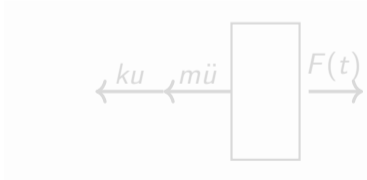
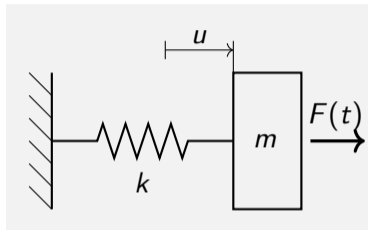
$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$



Modell und Freischnitt

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 1/2

Bewegungsgleichung

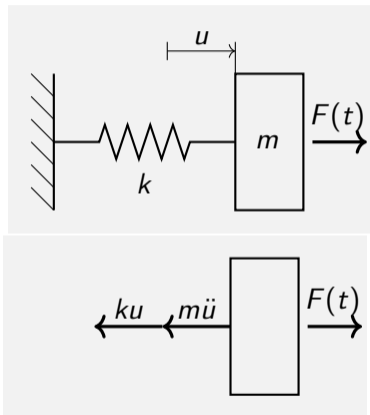
$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$



Modell und Freischnitt

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 1/2

Bewegungsgleichung

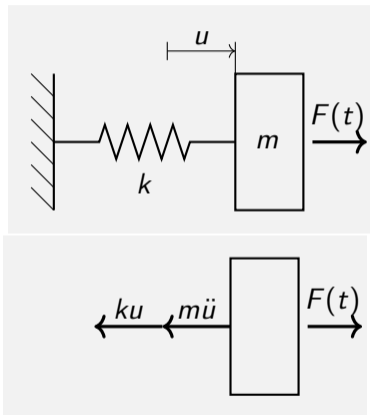
$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$



Modell und Freischnitt

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 1/2

Bewegungsgleichung

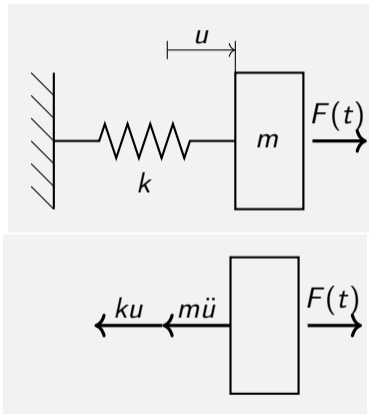
$$F(t) - ku - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$



Modell und Freischnitt

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 2/2

Die Gesamtlösung ist die Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung (*Einschwingen*) und einer partikulären Lösung (*eingeschwungener Zustand*).
Bei einfacher harmonischer Anregung

$$a(t) = a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t$$

lautet die Gesamtlösung (Herleitung siehe Anhang) für $\omega \neq \omega_n$

$$u(t) = \underbrace{B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t}_{u_h(t)} + \underbrace{\frac{a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t}{1 - (\omega/\omega_n)^2}}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen.

Anmerkung: das Einschwingen endet nie und bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ passiert etwas *besonderes* (Knobelspaß).

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 2/2

Die Gesamtlösung ist die Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung (*Einschwingen*) und einer partikulären Lösung (*eingeschwungener Zustand*).
Bei einfacher harmonischer Anregung

$$a(t) = a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t$$

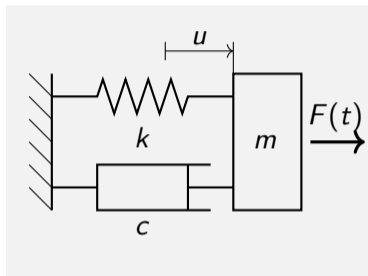
lautet die Gesamtlösung (Herleitung siehe Anhang) für $\omega \neq \omega_n$

$$u(t) = \underbrace{B_1 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t}_{u_h(t)} + \underbrace{\frac{a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t}{1 - (\omega/\omega_n)^2}}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen.

Anmerkung: das Einschwingen endet nie und bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ passiert etwas *besonderes* (Knobelspaß).

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 1/5



Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

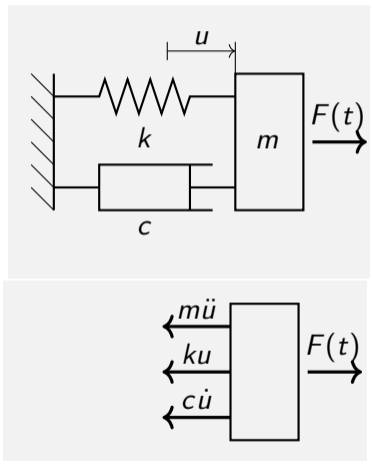
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 1/5



Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

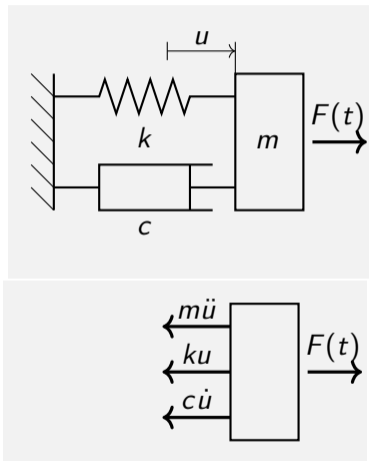
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 1/5



Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

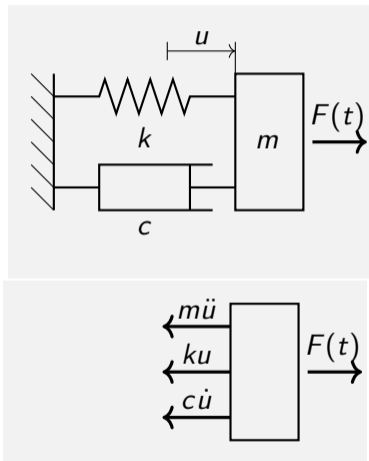
$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 1/5



Bewegungsgleichung

$$F(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$$

Standardform

$$\ddot{u} + 2D\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 a(t)$$

$$2D\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{k}$$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 2/5

Für einfache harmonische Anregung $a(t) = a_C \cos \omega t + a_S \sin \omega t$ lautet die Gesamtlösung

$$u(t) = \underbrace{e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_D t + B_2 \sin \omega_D t)}_{u_h(t)} + \underbrace{u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t}_{u_p(t)},$$

wobei die unbestimmten Koeffizienten B_1 und B_2 aus den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ folgen, während die Koeffizienten der partikulären Lösung durch die Anregung festgelegt sind (siehe nächste Folie).

Die Lösung $u_h(t)$ entspricht der freien gedämpften Schwingung.

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 3/5

Die Koeffizienten der partikulären Lösung $u_p(t) = u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t$ lauten

$$u_C = V^2 \left((1 - \beta^2) a_C - 2D\beta a_S \right),$$

$$u_S = V^2 \left((1 - \beta^2) a_S + 2D\beta a_C \right),$$

mit den Hilfsgrößen Vergrößerungsfunktion und Abstimmungsverhältnis

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2}},$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}.$$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 4/5

Alternativ lassen sich Anregung und eingeschwungene Antwort auch durch Amplitude und Phasenwinkel darstellen

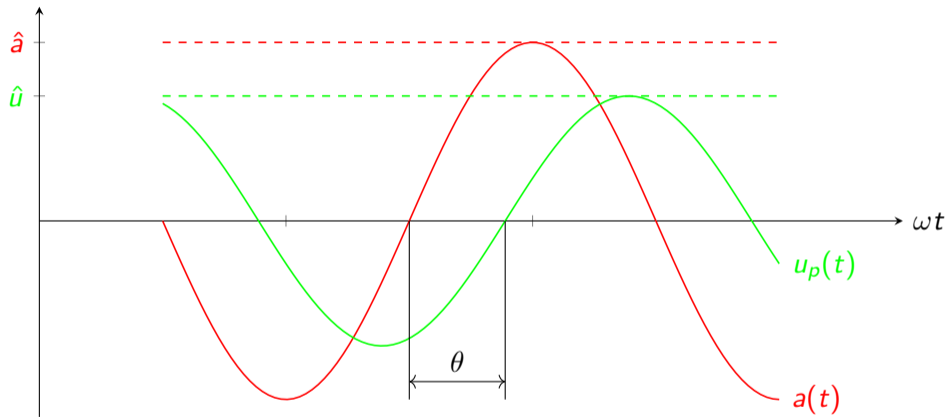
$$a(t) = \hat{a} \cos(\omega t - \theta_a) \quad \text{mit} \quad \hat{a}^2 = a_S^2 + a_C^2 \quad \text{und} \quad \tan \theta_a = \frac{a_S}{a_C},$$
$$u_p(t) = \hat{u} \cos(\omega t - \theta_u) \quad \text{mit} \quad \hat{u}^2 = u_S^2 + u_C^2 \quad \text{und} \quad \tan \theta_u = \frac{u_S}{u_C}.$$

In dieser Darstellung lauten die Beziehungen zwischen Anregung und Antwort

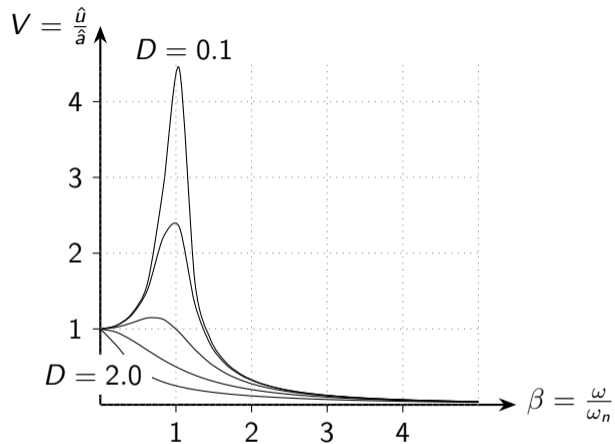
$$\hat{u} = V \hat{a},$$
$$\theta = \theta_u - \theta_a = \arctan \left(\frac{2D\beta}{1 - \beta^2} \right).$$

Hausaufgabe: Überprüfen durch Einsetzen.

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 5/5

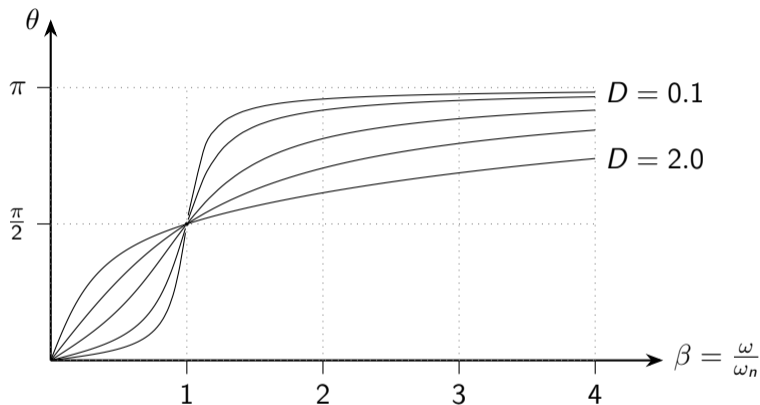


Erzwungene Schwingungen, gedämpft 5/5



Vergrößerungsfunktion für $D = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 5/5



Phasendifferenz für $D = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$

Leistungsbilanz 1/3

Die anregende Kraft (Annahme: $\theta_F = \theta_a = 0 \rightsquigarrow \theta_u = \theta$)

$$F = \hat{F} \sin(\omega t)$$

und die resultierende Antwort im eingeschwungenen Zustand $u(t) = u_p(t)$

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t - \theta)$$

$$\dot{u}(t) = \hat{u}\omega \cos(\omega t - \theta)$$

ergeben die mechanische Leistung

$$P(t) = F(t) \dot{u}(t)$$

$$P(t) = \hat{F} \sin(\omega t) \hat{u}\omega \cos(\omega t - \theta)$$

Leistungsbilanz 2/3

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$2 \sin(x) \cos(x - y) = \left(\underbrace{\sin(2x - y)}_{x+(x-y)} + \underbrace{\sin(y)}_{x-(x-y)} \right)$$

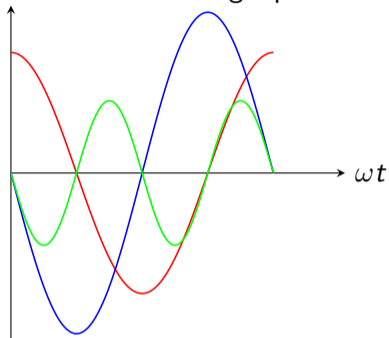
lässt sich die mechanische Leistung

$$P(t) = \hat{F} \hat{u} \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t - \theta)$$
$$P(t) = \underbrace{\frac{\hat{F} \hat{u} \omega}{2} \sin(2\omega t - \theta)}_{\text{Blindleistung}} + \underbrace{\frac{\hat{F} \hat{u} \omega}{2} \sin(\theta)}_{\text{Wirkleistung}}$$

als Schwankung um einen konstanten Mittelwert darstellen.

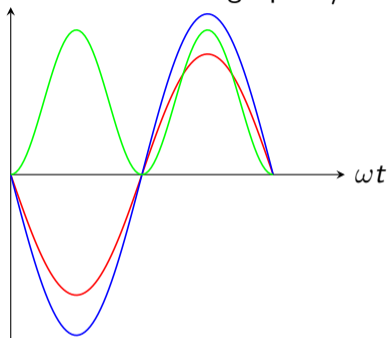
Leistungsbilanz 3/3

Grenzfall des Energiespeichers



Federkraft F_F ,
Geschwindigkeit \dot{u} und
Momentanleistung P_F

Grenzfall der Energiequelle/-senke



Dämpferkraft F_D ,
Geschwindigkeit \dot{u} und
Momentanleistung P_D

- [Bro⁺12] Ilja N. Bronstein et al. *Taschenbuch der Mathematik*. Vol. 1. Springer-Verlag, 2012. ISBN: 3817120168.
- [Hau86] Wolfgang Haupt. *Bodendynamik: Grundlagen und Anwendung*. Vieweg, 1986. ISBN: 9783528088781.

Ergänzende und alternative Herleitungen

- freie Schwingungen, unterkritisch gedämpft;
- erzwungene Schwingungen, ungedämpft;
- erzwungene Schwingungen, gedämpft;
- komplexe Darstellung.

Freie Schwingungen, gedämpft

Lösung des unterkritisch gedämpften Falls

$$\begin{aligned}u(t) &= A_1 e^{-\omega_n(D-\sqrt{D^2-1})t} + A_2 e^{-\omega_n(D+\sqrt{D^2-1})t} \\&= A_1 e^{-\omega_n D t} e^{\omega_n \sqrt{D^2-1} t} + A_2 e^{-\omega_n D t} e^{-\omega_n \sqrt{D^2-1} t} \\&= A_1 e^{-\overbrace{\omega_n D}^{\delta} t} e^{i \overbrace{\omega_n \sqrt{1-D^2}}^{\omega_D} t} + A_2 e^{-\overbrace{\omega_n D}^{\delta} t} e^{-i \overbrace{\omega_n \sqrt{1-D^2}}^{\omega_D} t} \\&= A_1 e^{-\delta t} e^{i \omega_D t} + A_2 e^{-\delta t} e^{-i \omega_D t} \\&= \left(A_1 (\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) + A_2 (\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t) \right) e^{-\delta t} \\ \Re\{u(t)\} &= \underbrace{\left(\Re\{A_1 + A_2\} \right)}_{B_1} \cos \omega_D t - \underbrace{\left(\Im\{A_1 - A_2\} \right)}_{B_2} \sin \omega_D t e^{-\delta t}\end{aligned}$$

Anmerkung: $u(t) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \Re\{A_1\} = \Re\{A_2\}, \Im\{A_1\} = -\Im\{A_2\}$

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 1/2

Um eine partikuläre Lösung für harmonische Anregung $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$ zu finden, wählen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned}u_p(t) &= u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t, \\ \dot{u}_p(t) &= -u_C \omega \sin \omega t + u_S \omega \cos \omega t, \\ \ddot{u}_p(t) &= -u_C \omega^2 \cos \omega t - u_S \omega^2 \sin \omega t.\end{aligned}$$

Zunächst beschränken wir uns auf den Cosinus-Anteil (Sinus analog).

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 2/2

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (Standardform) führt auf

$$-u_C \omega^2 \cos \omega t + u_C \omega_n^2 \cos \omega t = a_C \omega_n^2 \cos \omega t.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$u_C = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} a_C \quad \leadsto \quad u_p(t) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} a_C \cos \omega t.$$

Bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ versagt dieser Ansatz, dann lautet die Lösung

$$u_p(t) = \frac{a_C \omega}{2} t \sin \omega t$$

Knobelspaß: Herleitung, beispielsweise per *Variation der Konstanten* [Bro⁺12].

Erzwungene Schwingungen, ungedämpft 2/2

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (Standardform) führt auf

$$-u_C \omega^2 \cos \omega t + u_C \omega_n^2 \cos \omega t = a_C \omega_n^2 \cos \omega t.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$u_C = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} a_C \quad \leadsto \quad u_p(t) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} a_C \cos \omega t.$$

Bei Resonanzanregung $\omega = \omega_n$ versagt dieser Ansatz, dann lautet die Lösung

$$u_p(t) = \frac{a_C \omega}{2} t \sin \omega t$$

Knobelspaß: Herleitung, beispielsweise per *Variation der Konstanten* [Bro⁺12].

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 1/2

Wie im ungedämpften Fall, und allgemein für jede inhomogene Differentialgleichung, gilt für die Gesamtlösung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Für einfache harmonische Anregung $a(t) = a_C \cos \omega t + a_S \sin \omega t$ führt der Ansatz $u_p(t) = u_C \cos \omega t + u_S \sin \omega t$ auf

$$u_C = V^2 \left((1 - \beta^2) a_C - 2D\beta a_S \right)$$

$$u_S = V^2 \left((1 - \beta^2) a_S + 2D\beta a_C \right)$$

Vergrößerungsfunktion $V = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2}}$, Abstimmungsverhältnis $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$.

Anmerkung: der eingeschwungene Zustand für andere Anregungsarten (Dämpferfußpunkt-, Fundament-, Unwucht-) weist qualitative Unterschiede auf, die Herleitung verläuft aber analog.

Erzwungene Schwingungen, gedämpft 2/2

Summen von Sinus- und Cosinusfunktionen lassen sich mittels Additionstheoremen durch eine der beiden Funktionen darstellen

$$a(t) = \hat{a} \cos(\omega t - \theta_a) = \overbrace{\hat{a} \cos \theta_a}^{a_C} \cos(\omega t) + \overbrace{\hat{a} \sin \theta_a}^{a_S} \sin(\omega t).$$

Amplitude \hat{a} und Phasenwinkel θ_a sind folglich festgelegt durch

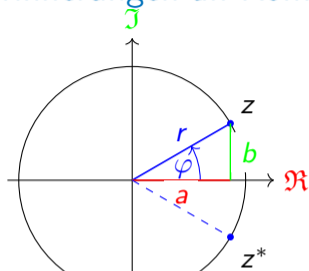
$$\hat{a}^2 = a_S^2 + a_C^2 \quad \text{und} \quad \tan \theta_a = \frac{a_S}{a_C}.$$

In dieser Darstellung lauten die Beziehungen zwischen Anregung und Antwort

$$\frac{\hat{u}}{\hat{a}} = V \quad \text{und} \quad \theta = \theta_u - \theta_a = \arctan \left(\frac{2D\beta}{1 - \beta^2} \right).$$

Anmerkung: Die Phasendifferenz wird üblicherweise auf $\theta \in (-\pi, \pi]$ begrenzt.

Erinnerungen an Komplexe Zahlen



$$z = a + ib = re^{i\varphi}$$

$$z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

$$\angle z = \arctan \frac{b}{a} = \varphi$$

$$\Re\{z\} = a = r \cos \varphi$$

$$\Im\{z\} = b = r \sin \varphi$$

Ausgewählte Formeln

$$z + z^* = 2 \Re\{z\}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$(z_1 z_2^*)^* = z_1^* z_2$$

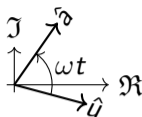
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$$

Frequenzgang und Leistungsbetrachtung werden nun wiederholt ($u \in \mathbb{C}$).

Frequenzgang ($u \in \mathbb{C}$) 1/3

Komplexe Erweiterung (Re “sichtbar”, Im “mitschleppen”)



$$\begin{array}{lll} u(t) = \hat{u} e^{i\omega t} & \text{mit} & \hat{u} = r_u e^{-i\theta_u}, \\ a(t) = \hat{a} e^{i\omega t} & \text{mit} & \hat{a} = r_a e^{-i\theta_a}, \\ F(t) = \hat{F} e^{i\omega t} & \text{mit} & \hat{F} = r_F e^{-i\theta_F}. \end{array}$$

Standardform des erregten, (viskos) gedämpften Einmassenschwingers

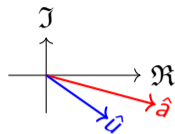
$$\ddot{u} + 2D\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 \hat{a} e^{i\omega t}.$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned} -\omega^2 \hat{u} e^{i\omega t} + 2iD\omega_n \omega \hat{u} e^{i\omega t} + \omega_n^2 \hat{u} e^{i\omega t} &= \omega_n^2 \hat{a} e^{i\omega t}, \\ (-\beta^2 + 2iD\beta + 1) \hat{u} e^{i\omega t} &= \hat{a} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Frequenzgang ($u \in \mathbb{C}$) 2/3

$$\hat{u} = \underbrace{\frac{1}{1 - \beta^2 + 2iD\beta}}_{H(\beta)} \hat{a}$$

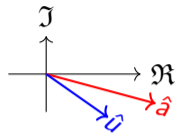


Der Frequenzgang $H(\beta)$ enthält sowohl die Vergrößerungsfunktion

$$\begin{aligned} V = |H| &= \left| \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2} - \frac{2i\beta D}{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta D)^2}{\left((1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2 \right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2}} \end{aligned}$$

Frequenzgang ($u \in \mathbb{C}$) 3/3

$$\hat{u} = \frac{1}{\underbrace{1 - \beta^2 + 2iD\beta}_{H(\beta)}} \hat{a}$$

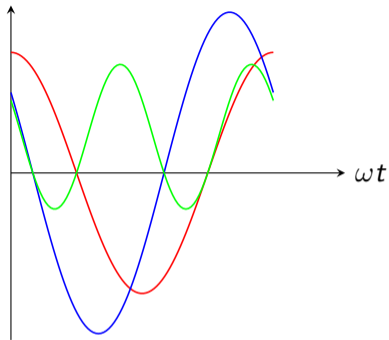


.. als auch die Phasendifferenz

$$\begin{aligned} \theta &= -\angle H = -\angle \left\{ \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2} - \frac{2i\beta D}{(1 - \beta^2)^2 + (2D\beta)^2} \right\} \\ &= -\arctan \left(\frac{-2\beta D}{1 - \beta^2} \right) = \arctan \left(\frac{2\beta D}{1 - \beta^2} \right) \end{aligned}$$

Arbeit über eine Periode $W_T = \pi \hat{F} \hat{u} \sin \theta$ mit $\sin \theta = \frac{2D\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2}}$ für viskose
und $\sin \theta = \frac{2D_h}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2D_h)^2}}$ für hysteretische Dämpfung.

Leistungsbilanz ($u \in \mathbb{C}$) 1/3



Anregende Kraft F ,
Geschwindigkeit \dot{u} und
Momentanleistung P

$$F = r_F e^{i(\omega t - \theta_a)}$$

$$u = r_u e^{i(\omega t - \theta_u)}$$

$$= r_u e^{i(\omega t - \theta_a - \theta)}$$

$$v = i\omega r_u e^{i(\omega t - \theta_a - \theta)}$$

$$= \omega r_u e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i(\omega t - \theta_a - \theta)}$$

$$= \omega r_u e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2} - \theta_a - \theta)}$$

$$r_v = \omega r_u$$

$$\theta_v = \theta_a + \theta - \frac{\pi}{2}$$

Leistungsbilanz ($u \in \mathbb{C}$) 2/3

$$\begin{aligned} P &= \Re \{F\} \Re \{v\} \\ &= \frac{1}{2}(F + F^*) \frac{1}{2}(v + v^*) \\ &= \frac{1}{4}(Fv + Fv^* + F^*v + F^*v^*) = \frac{1}{4}(Fv + Fv^* + (Fv + Fv^*)^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re \{Fv + Fv^*\} \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ r_F e^{i(\omega t - \theta_a)} r_v e^{i(\omega t - \theta_v)} + r_F e^{i(\omega t - \theta_a)} r_v e^{-i(\omega t - \theta_v)} \right\} \\ &= \Re \left\{ \frac{r_F r_v}{2} e^{i(\theta_v - \theta_a)} (e^{i2(\omega t - \theta_v)} + 1) \right\} \end{aligned}$$

Leistungsbilanz ($u \in \mathbb{C}$) 3/3

$$P = \Re \left\{ P_S (e^{i2(\omega t - \theta_v)} + 1) \right\} \quad \text{mit} \quad P_S = \frac{r_F r_v}{2} e^{i(\theta_v - \theta_a)}$$

Formelsammlung: $\Re\{z_1 z_2\} = \Re\{z_1\}\Re\{z_2\} - \Im\{z_1\}\Im\{z_2\}$

$$\begin{aligned} P &= \Re\{P_S\} \Re\left\{e^{i2(\omega t - \theta_v)} + 1\right\} - \Im\{P_S\} \Im\left\{e^{i2(\omega t - \theta_v)} + 1\right\} \\ &= \Re\{P_S\} \left(\cos(2\omega t - 2\theta_v) + 1\right) - \Im\{P_S\} \sin(2\omega t - 2\theta_v) \end{aligned}$$

Damit ist die Scheinleistung $|P_S|$ dargestellt als Summe eines schwelenden Verlaufs (Wirkleistung $\Re\{P_S\}$) und eines mittelwertfreien Verlaufs (Blindleistung $\Im\{P_S\}$).