2. Leiten Sie aus der stationären SCHRÖDINGER-Gleichung das Verhalten der Wellenfunktion und ihrer Ableitung an einer Stelle x_0 her, bei der das Potenzial

a) einen endlichen Sprung hat

b) einen δ-förmigen Beitrag $V_0\,\delta(x - x_0)$ besitzt.

Hinweis: Integrieren Sie die SCHRÖDINGER-Gleichung über ein kleines Intervall, das die Stelle x_0 enthält.

ZUSG:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = \left[E - V(x)\right]\varphi(x) \qquad (3)$$

Betrachte Verhalten von $\varphi(x)$ nahe x_0. Integriere (3) über kleines Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ um x_0 mit $\varepsilon > 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx\, \varphi''(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon) - \varphi'(x_0-\varepsilon)\right]$$

$$\overset{!}{\underset{(3)}{=}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left[E - V(x)\right]\varphi(x)\,dx \qquad (4)$$

a) $V(x)$ habe endlichen Sprung bei $x = x_0$ und ist auch selbst endlich bei $x = x_0$.
Dann ex. nach dem Mittelwertsatz d. Integralrechnung ein $\xi \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ mit:

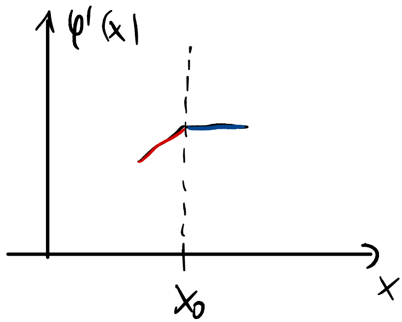
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon) - \varphi'(x_0-\varepsilon)\right] = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left[E - V(x)\right]\varphi(x)\,dx$$

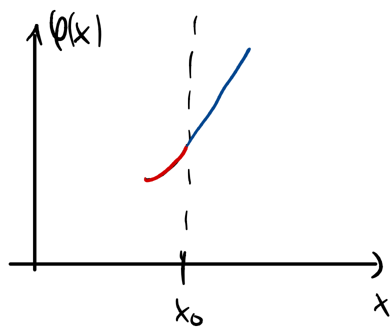
$$= \left[E - V(\xi)\right]\underbrace{\varphi(\xi)}_{\text{stetig}}(2\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt also

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon) - \varphi'(x_0-\varepsilon)\right] = 0$$

d.h. φ' ist stetig in x_0 (nicht notw. diffbar)
Beispiel:





b) δ-Förmiger Beitrag $V(x) \simeq V_0\,\delta(x-x_0)$ in Gleichung (4). $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} E\,\varphi(x)\,dx$ verschwindet für $\varepsilon \downarrow 0$ (siehe (a)). Aber anderer Beitrag überlebt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon)-\varphi'(x_0-\varepsilon)\right]$$

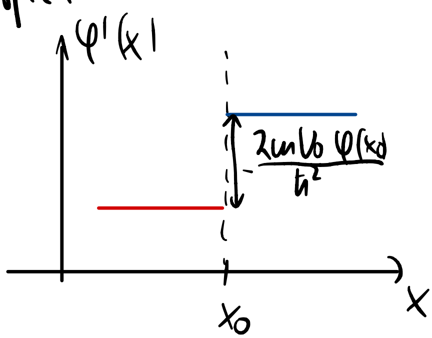
$$\underset{(4)}{=} -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} V_0\,\delta(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx$$

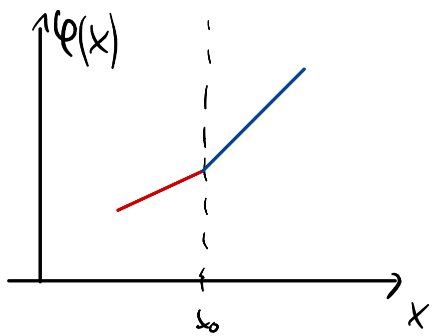
$$= -V_0\,\varphi(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ φ' hat Sprung bei x_0

$\Rightarrow$ φ hat Knick bei x_0

Beispiel:



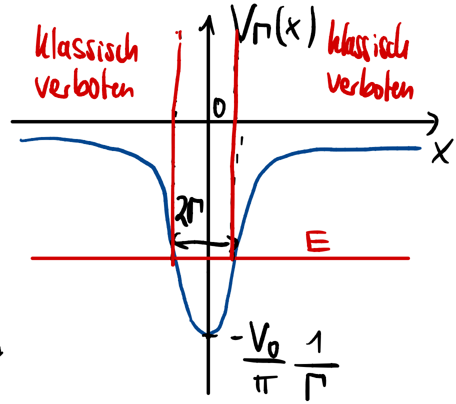


3. Finden Sie die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für die *gebundenen* Zustände eines Teilchens in dem Potenzial $V(x) = -V_0\,\delta(x)$ (mit $V_0 > 0$).

δ-förmiges Potential: $V(x) = -V_0\,\delta(x)$

Wird anschaulich, wenn wir δ-Distribution als Grenzwert einer Funktionenfolge betrachten. Zum Beispiel:

$$V_\Gamma(x) = -V_0 \underbrace{\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma}{x^2+\Gamma^2}}_{\text{Lorentzkurve}}$$



mit $V(x) = \lim\limits_{\Gamma \downarrow 0} V_\Gamma(x)$.

$\rightarrow$ Minimum wird unendlich negativ und hat verschwindende Breite für $\Gamma \downarrow 0$.

Gebundene Zustände bei Energien $E < 0$.
Alle $x \neq 0$ sind für $\Gamma \downarrow 0$ im klassisch verbotenen Bereich mit verschwindendem Potential, $V(x) = 0$.
Dort lösen wir die ZUSG:

$$H(x)\,\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\,\varphi(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gebunden}}}{=} -|E|\,\varphi(x) \qquad (5)$$

Ansatz: $\varphi(x) = \alpha\, e^{-\kappa x}$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \alpha\, e^{-\kappa x}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2\right) = \alpha\, e^{-\kappa x}\left(-|E|\right)$$

$$\Rightarrow \kappa = \pm \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \equiv \pm \kappa_0, \quad \kappa_0 = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} > 0$$

$$\Rightarrow \text{allg. Lsg.:} \quad \varphi(x) = \alpha_+ e^{\kappa_0 x} + \alpha_- e^{-\kappa_0 x}$$

Damit die Lsg. normierbar bleibt, muss diese in den einzelnen Bereichen exponentiell abfallen, d.h.
Für $x < 0$ ist

$$\varphi(x) = \alpha_+ e^{\kappa_0 x} \xrightarrow{x \to -\infty} 0$$

Für $x > 0$ ist

$$\varphi(x) = \alpha_- e^{-\kappa_0 x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

Damit φ bei $x = 0$ stetig ist, muss gelten

$$\alpha_+ = \lim_{x \uparrow 0} \varphi(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \downarrow 0} \varphi(x) = \alpha_- \equiv \alpha$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \alpha e^{-\kappa_0 |x|}$$

Gemäß Aufgabe 2(b) mit $V_0 \to -V_0$, springt φ' bei $x = 0$ gemäß

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(-\varepsilon) \right] = - \frac{2 m V_0 \, \varphi(0)}{\hbar^2}$$

$$= - \frac{2 m V_0 \, \alpha}{\hbar^2}$$

Ableitung

Für $x < 0$:

$$\varphi'(x) = \alpha \varkappa_0 \, e^{\varkappa_0 x}$$

Für $x > 0$:

$$\varphi'(x) = - \alpha \varkappa_0 \, e^{-\varkappa_0 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\varphi'(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \right] = - \alpha \varkappa_0 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{-\varkappa_0 \varepsilon} + e^{-\varkappa_0 \varepsilon} \right)$$

$$= - 2 \alpha \varkappa_0$$

$$\overset{!}{=} - \frac{2 m V_0 \, \alpha}{\hbar^2}$$

$$\rightarrow \varkappa_0 = \frac{m V_0}{\hbar^2} = \frac{\sqrt{2 m |E|}}{\hbar}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = - \frac{m V_0}{2 \hbar^2}}$$

Normierung

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\varphi(x)|^2 = \underbrace{\alpha^2 \int_{-\infty}^{0} dx \, e^{2\varkappa_0 x}}_{= \frac{1}{2\varkappa_0} e^{2\varkappa_0 x} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2\varkappa_0}} + \underbrace{\alpha^2 \int_{0}^{\infty} dx \, e^{-2\varkappa_0 x}}_{= -\frac{1}{2\varkappa_0} e^{-2\varkappa_0 x} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\varkappa_0}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\varkappa_0}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\varkappa_0} = \frac{\sqrt{m V_0}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = \frac{\sqrt{m V_0}}{\hbar} \, e^{-\frac{m V_0}{\hbar^2} |x|}}$$

Nur ein gebundener Zustand φ mit Energie E.