Aufgabe 7.7

Zeigen Sie, dass die Teilerrelation $a|b$ mit $\forall a, b : (a|b \leftrightarrow \exists c \in M : ac = b)$

- auf der Menge $\mathbb{N}$ eine Halbordnung, aber keine totale Ordnung ist,

Halbordnung:

Reflexivität: Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $a|a$, da $a \cdot 1 = a$.

Antisymmetrie: Für alle $a,b \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $a|b$ und $b|a$, dann ist $a=b$.

Transitivität: Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $a|b$ und $b|c$, dann $a|c$.

Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ erfüllt diese Eigenschaften, daher ist sie eine Halbordnung.

Keine totale Ordnung:

Totalität: Die Teilerrelation ist nicht total, da es Paare von natürlichen Zahlen gibt, bei denen keine Teilerbeziehung besteht (zum Beispiel 2 und 3).

- auf der Menge $\mathbb{Z}$ keine Halbordnung ist.

Die Teilerrelation auf $\mathbb{Z}$ erfüllt nicht die Reflexivitätsbedingung, da es negative Zahlen gibt, die nicht von positiven Zahlen geteilt werden können, und umgekehrt. Zum Beispiel ist -2 nicht von 3 teilbar. Daher ist sie keine Halbordnung.