Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden | Sommersemester 2023
Prof. Dr. A. Voß-Böhme, Dr. K. Fischer | Abgabe am 30. Juni 2023

Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 6

Fotografieren/scannen Sie Ihre **handschriftlichen** Lösungen (mit Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Freitag, 30.06.2023, 23:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, 6. Hausaufgabe, hoch.

Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä.), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Berechnen Sie **zwei** der folgenden Integrale, die Sie selbst auswählen dürfen, mit Hilfe der angegebenen Integrationsmethode.

(a) $I_1 = \int e^x \cdot (2 - \frac{e^{-x}}{x^3})\,\mathrm{d}x$, mittels äquivalenter Umformungen

(b) $I_2 = \int 2x(x-2)^{22}\,\mathrm{d}x$, mittels partieller Integration

(c) $I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$, mittels Substitution.

Aufgabe 2: Die Stehfläche einer Konzertarena kann durch die Fläche modelliert werden, welche die Funktion $f : [0; 140] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{40}(x-40)^2 + 70 & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 50, & \text{für } 60 \le x \le 100 \\ -\frac{1}{40}(x-120)^2 + 70 & \text{für } 100 \le x \le 140 \end{cases}$$

mit der x-Achse einschließt. Dabei entspricht eine Einheit auf der x- bzw. y-Achse einem Meter in der Realität.

(a) Zeichnen Sie die Stehfläche in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(b) Nach einem Konzert soll die Fläche mit Hilfe einer Kehrmaschine gereinigt werden. Der Preis beträgt 0.79 Euro pro Quadratmeter. Um die Kosten für die Reinigung grob zu überschlagen, muss zunächst die Fläche berechnet werden. Berechnen Sie die Fläche mit Hilfe der Integralrechnung und ermitteln Sie anschließend die Reinigungskosten.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktionen $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4y - 2x - 2}}.$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich D_f von f in Mengenschreibweise an.

(b) Zeichnen Sie für die Funktion f ein Niveaulinienbild für die Niveaus $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1: Berechnen Sie **zwei** der folgenden Integrale, die Sie selbst auswählen dürfen, mit Hilfe der angegebenen Integrationsmethode.

(a) $I_1 = \int e^x \cdot (2 - \frac{e^{-x}}{x^3})\,\mathrm{d}x$, mittels äquivalenter Umformungen

(b) $I_2 = \int 2x(x-2)^{22}\,\mathrm{d}x$, mittels partieller Integration

(c) $I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$, mittels Substitution.

c)

$$I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

1. S. Subst.: $h = x^2 + 4$

2. S. dx ersetzen:

$$\frac{dh}{dx} = h' = 2x$$

$$dx = \frac{dh}{2x}$$

$$= \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}\,dx$$

$$= \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} \cdot dh$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot dh$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= h^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{(x^2+4)^{\frac{1}{2}} + c}} = \underline{\underline{\sqrt{x^2+4} + c}}$$

b) $I_2 = \int 2x(x-2)^{22}$

$u' = (x-2)^{22} \quad u = \frac{1}{23}(x-2)^{23}$

$v = 2x \quad v' = 2$

$uv - \int u v' \, dx$

$$= 2x \cdot \frac{1}{23}(x-2)^{23} - \int 2 \cdot \frac{1}{23} \cdot (x-2)^{23} \, dx$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{23}(x-2)^{23} - \frac{2}{23} \int (x-2)^{23} \, dx$$

$$= \frac{2x}{23}(x-2)^{23} - \frac{2}{23} \cdot \frac{1}{24}(x-2)^{24} + C$$

$$= \frac{2x}{23}(x-2)^{23} - \frac{1}{276}(x-2)^{24} + C$$

$$= \frac{2x}{23}(x-2)^{23} - \frac{1}{276}(x-2)^{23}(x-2) + C$$

$$= \left(\frac{2x}{23} - \frac{1}{276} \cdot (x-2)\right) \cdot (x-2)^{23} + C$$

$$= \left(\frac{552x - 23x + 46}{6348}\right) \cdot (x-2)^{23} + C$$

$$= \left(\frac{529x + 46}{6348}\right) \cdot (x-2)^{23} + C$$

$$= \left(\frac{1}{276} \cdot (23x + 2)\right) \cdot (x-2)^{23} + C$$

Aufgabe 2: Die Stehfläche einer Konzertarena kann durch die Fläche modelliert werden, welche die Funktion $f : [0; 140] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{40}(x-40)^2 + 70 & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ 50, & \text{für } 60 \leq x \leq 100 \\ -\frac{1}{40}(x-120)^2 + 70 & \text{für } 100 \leq x \leq 140 \end{cases}$$

mit der x-Achse einschließt. Dabei entspricht eine Einheit auf der x- bzw. y-Achse einem Meter in der Realität.

(a) Zeichnen Sie die Stehfläche in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(b) Nach einem Konzert soll die Fläche mit Hilfe einer Kehrmaschine gereinigt werden. Der Preis beträgt 0.79 Euro pro Quadratmeter. Um die Kosten für die Reinigung grob zu überschlagen, muss zunächst die Fläche berechnet werden. Berechnen Sie die Fläche mit Hilfe der Integralrechnung und ermitteln Sie anschließend die Reinigungskosten.

b) Fläche 1: $f(x) = -\frac{1}{40}(x-40)^2 + 70$ für $0 \leq x \leq 60$

$$F_1 = \int_0^{60} -\frac{1}{40}(x-40)^2 + 70 \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{40} \quad (x-40)^3 + 70x \right]_0^{60}$$

$$= \left(-\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{3}(60-40)^3 + 70 \cdot 60\right) - \left(-\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{3}(0-40)^3 + 70 \cdot 0\right)$$

$$= \underline{3600} \, m^2$$

Fläche 2: $f_2(x) = 50$ für $60 \leq x \leq 100$

$$F_2 = \int_{60}^{100} 50 \, dx = \left[50x \right]_{60}^{100}$$

$$= 50 \cdot 100 - 50 \cdot 60 = \underline{2000} \, m^2$$

Fläche 3: $f_3(x) = -\frac{1}{40}(x-120)^2 + 70$ für $100 < x < 140$

$$F_3 = \int_{100}^{140} -\frac{1}{40}(x-120)^2 + 70$$

$$= \left[-\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{3}(x-120)^3 + 70x\right]_{100}^{140}$$

$$= \left(-\frac{1}{120} \cdot (100-120)^3 + 70 \cdot 100\right) - \left(\cdot\frac{1}{120} \cdot (140-120)^3 + 70 \cdot 120\right)$$

$$= \underline{\frac{8000}{3}} \, m^2$$

Fläche zusammen:

$$F_{ges} = F_1 + F_2 + F_3 \approx 8266{,}66\overline{6} \; m^2 = \frac{24800}{3}$$

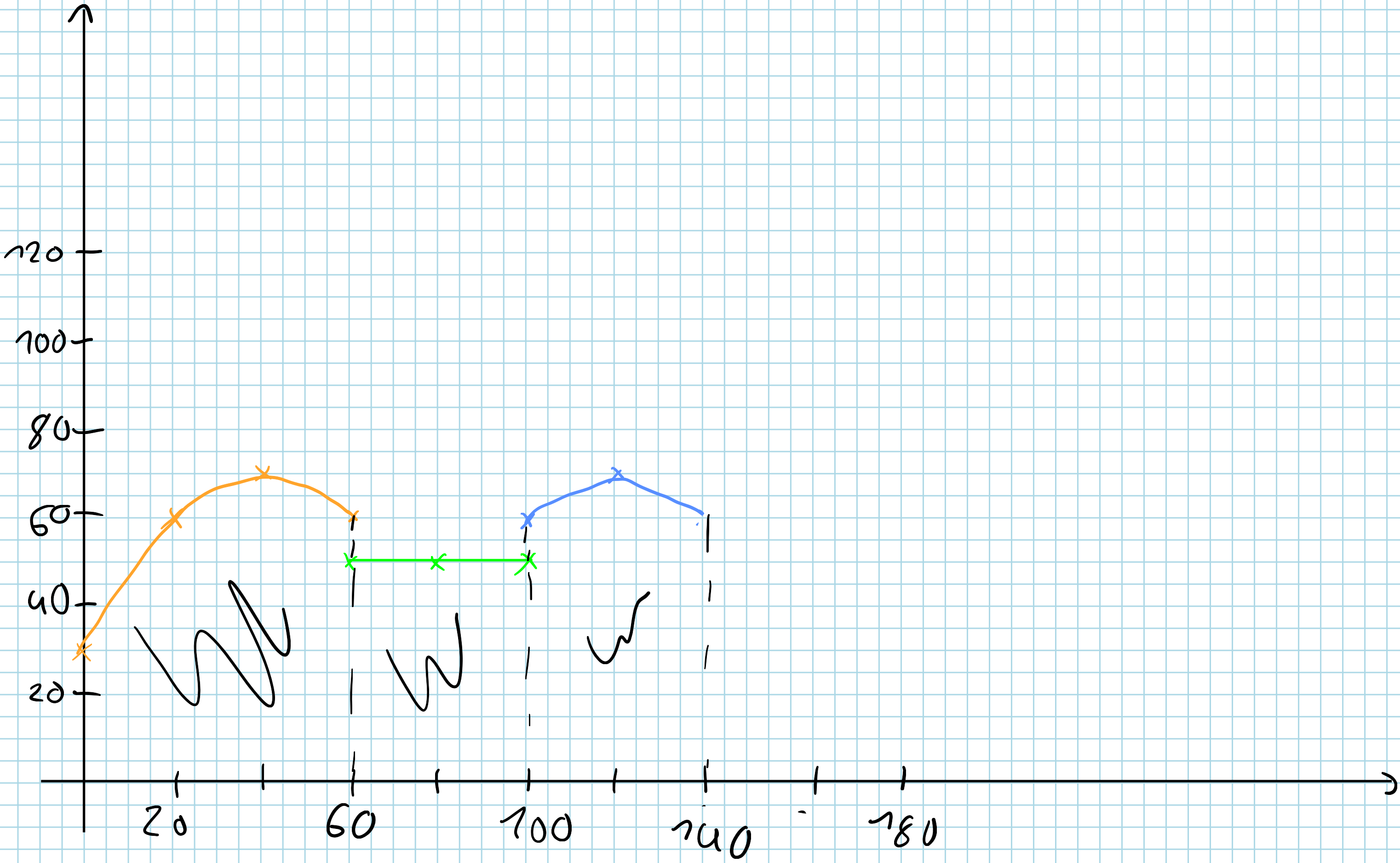
Reinigungskosten:

$$F_{Ges} \cdot 0{,}79 \frac{€}{m^2} = \underline{\underline{6530{,}6\overline{6} \; €}}$$

Die Fläche der Konzertfläche beträg ca. 8266,7 m².

Die Reinigungskosten betragen ca. 6531 €.

a)



Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktionen $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4y - 2x} - 2}.$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich D_f von f in Mengenschreibweise an.

(b) Zeichnen Sie für die Funktion f ein Niveaulinienbild für die Niveaus $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{1}{2}$.

a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{x}{2}, \; y \neq \frac{x}{2} + 1\}$

1. $4y - 2x \geq 0$

$4y \geq 2x \quad | :4$

$y \geq \frac{x}{2}$

2. $\sqrt{4y-2x} \neq 2 \quad | ()^2$

$4y - 2x \neq 4 \quad | +2x$

$4y \neq 4 + 2x \quad | :4$

$y \neq \frac{x}{2} + 1$

b) $z = c = \text{const} \qquad c \in W_f$

$$c = \frac{1}{\sqrt{4y-2x}-2} \qquad \Big| \cdot \sqrt{4y-2x}-2 \qquad \Big| : c$$

$$\sqrt{4y-2x} - 2 = \frac{1}{c} \qquad \Big| + 2$$

$$\sqrt{4y-2x} = \frac{1}{c} + 2 \qquad \Big| (\,)^2$$

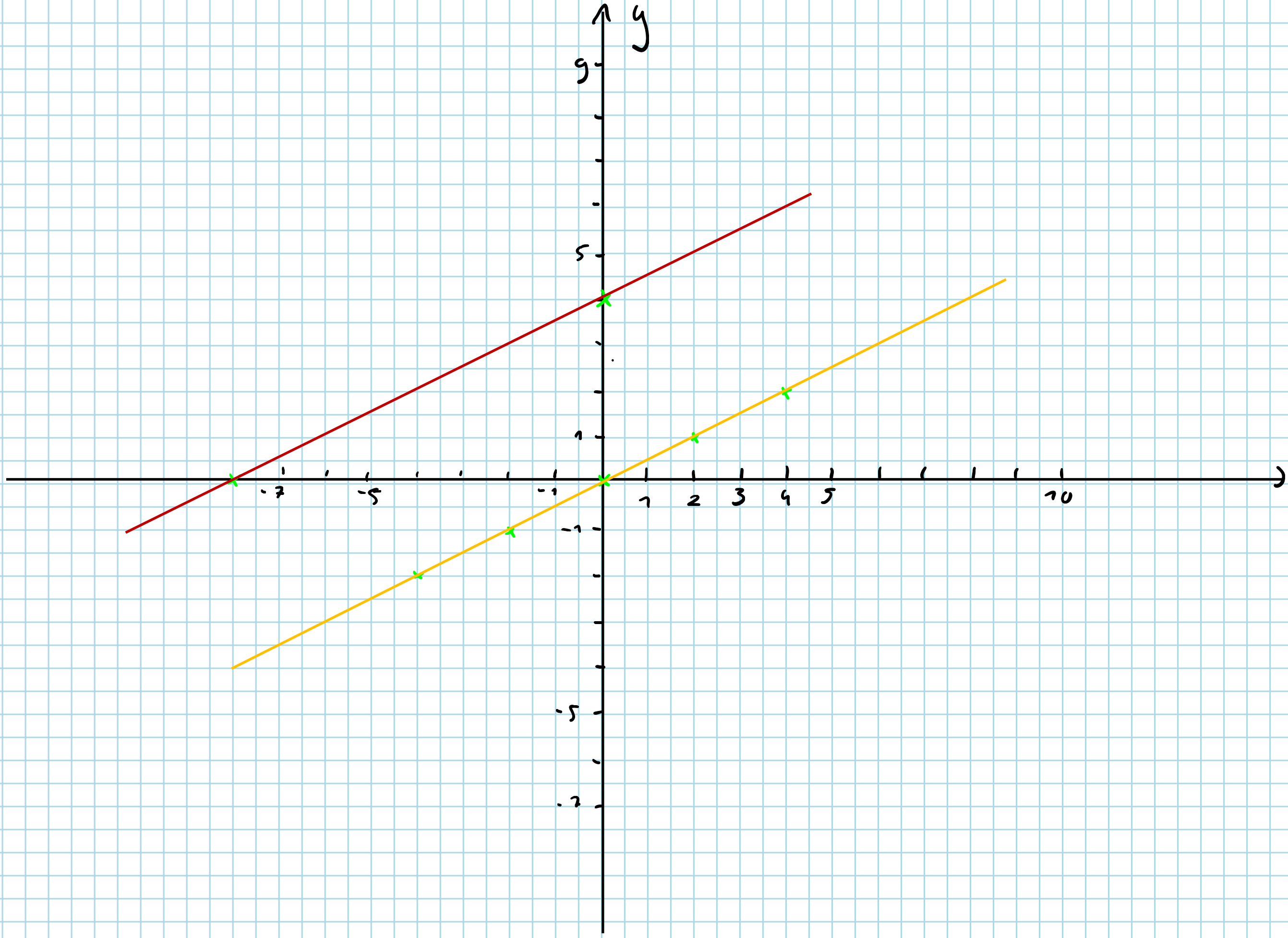
$$4y - 2x = \left(\frac{1}{c}+2\right)^2 \qquad \Big| + 2x$$

$$4y = \left(\frac{1}{c}+2\right)^2 + 2x \qquad \Big| : 4$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{c}+2\right)^2 + 2x}{4}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}: \quad y = \frac{\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+2\right)^2 + 2x}{4} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \quad y = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+2\right)^2 + 2x}{4} = \underline{\underline{\frac{8+x}{2}}}$$



Aktualisierung nicht mit drin!