

Strömungsprobleme der Mechanische Verfahrenstechnik

Folien zur Vorlesung

NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH!

PD Dr.-Ing. habil. Frank Babick, 1. April 2021

2. Schleichende Umströmung von Einzelpartikeln

Lernziele zu Kapitel 2

- Wissen:
 - Begriffe: *Umströmung, Scherströmung, Dehnströmung*
 - Stokes'sches Gesetz für feste und fluide Kugeln
 - Verhalten von Partikeln im Scherfeld
 - stochastische Strömungskräfte
- Fähigkeiten:
 - Berechnung des Strömungswiderstandes von Teilchen
 - Berechnung von Partikeldiffusion und -sedimentation
 - Berechnung instationärer Partikelbewegungen

2.1 Einzelpartikelbewegung

- *Strömungsformen und Bewegungsarten* -

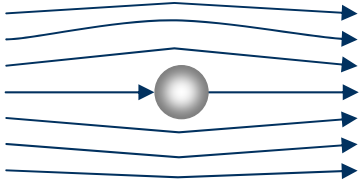
Ursachen und Form von Partikelbewegungen

- Ursachen
 - Feldkräfte (z.B. Gravitation, elektrostatische Kräfte)
 - stochastische Kräfte (Diffusionskräfte/osmotische Kräfte)
 - Druck- und Strömungskräfte (z.B. hydrostatischer & dynamischer Auftrieb)
 - korrespondierende Drehmomente
- Ausprägungen
 - Migration = gerichtete Translation (z.B. Sedimentation, Elektrophorese)
 - Rotation im Scherfeld
 - Brownsche Bewegung = ungerichtete Translation und Rotation
 - innere Strömungen in Tropfen und Blasen
 - beschleunigte/abgebremste Bewegung (z.B. in Düsen/Trägheitsabscheidern)
 - oszillatorische Bewegung (z.B. in Schallfeldern oder Wechselfeldern)
- Beschreibungsformen
 - aus Sicht eines externen Beobachters (Strömungsfeld \mathbf{v} , Partikel \mathbf{u}_p)
 - aus Sicht des Partikels (Relativbewegung des Fluids $\mathbf{v} - \mathbf{u}_p$)
 - als Abweichung von der ungestörten Strömung ($\mathbf{v} - \mathbf{v}^\infty$)

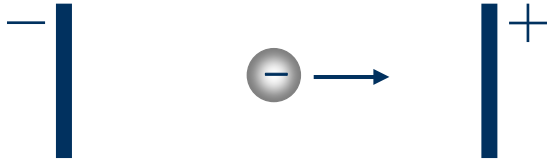
Szenarien der Partikelbewegung und *Mobilität*

- Umströmung eines fixierten Partikels → hydrodynamischen Widerstand
 - mechanische/hydrodynam. Mobilität $\mu_{\text{hd}} = \frac{v_{\text{P}}}{F_{\text{W}}}$
- Migration eines Aerosolpartikels im elektrischen Feld → Elektrophorese
 - elektrostatische Mobilität $\mu_{\text{es}} = \frac{v_{\text{rel}}}{|\mathbf{E}|} = \mu_{\text{hd}} \cdot Q_{\text{P}}$
- Migration eines Suspensionspartikels im elektrischen Feld → Elektrophorese
 - elektrophoretische Mobilität $\mu_{\text{ep}} = \frac{v_{\text{rel}}}{|\mathbf{E}|} = \mu_{\text{hd}} \cdot Q_{\text{diff}}$
- Brownsche Bewegung in Gasen und Flüssigkeiten
 - Brownsche Mobilität / Diffusionskoeffizient $D_{\text{P}} = \mu_{\text{hd}} \cdot \langle E_{\text{kin}} \rangle$
- Migration im Gravitationsfeld → Sedimentation
 - Sinkgeschwindigkeit $v_{\text{Stokes}} = \mu_{\text{hd}} \cdot (F_{\text{G}} - F_{\text{A}})$

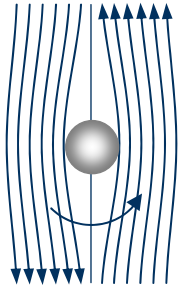
Mobilitätsbezogene Partikelmerkmale



hydrodynam.
Widerstand



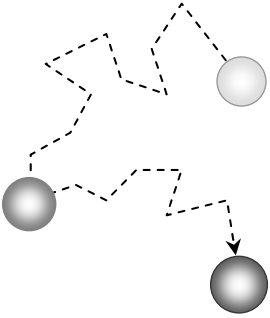
elektrostatische
Mobilität



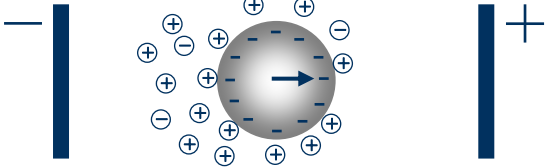
hydrodynam.
Drehmoment



Sinkgeschwindigkeit



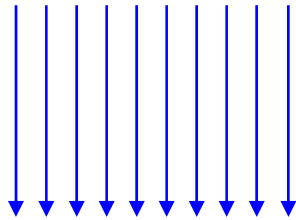
Diffusions-
koeffizient



elektrophoretische
Mobilität

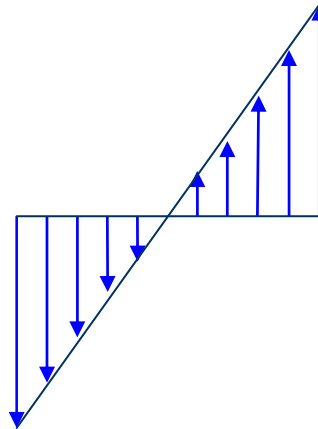
Formen laminarer Strömung

Gleichströmung/ Anströmung



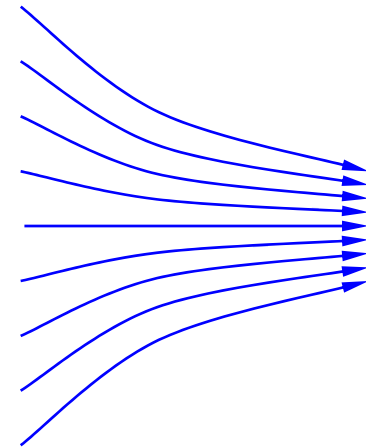
- einheitliche Fluidgeschwindigkeit
- z.B. im Zentrum einer Rohrströmung, bei Sedimentation

Scherströmung



- Geschwindigkeitsgradient quer zu Stromlinien
- z.B. in Wandnähe, bei Viskositätsmessung

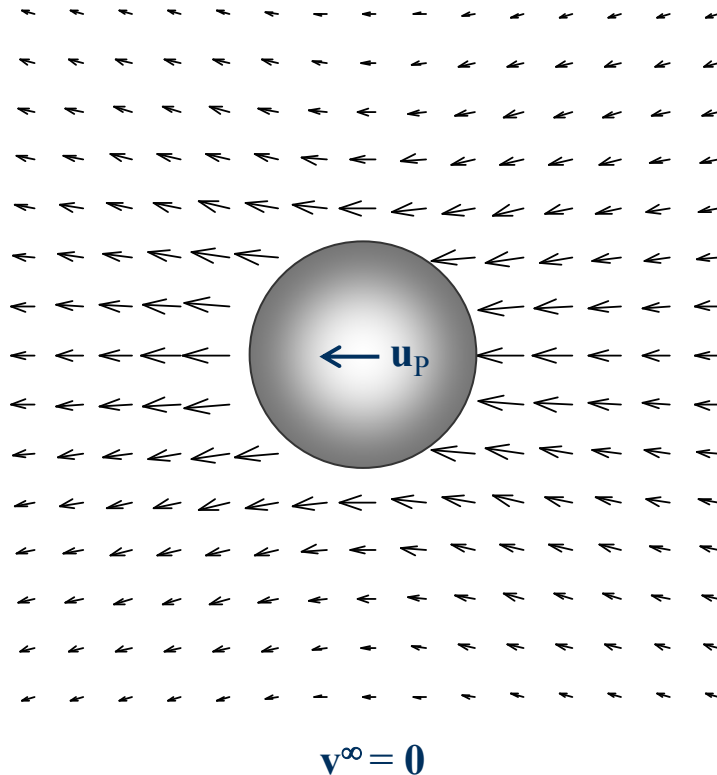
Dehnströmung



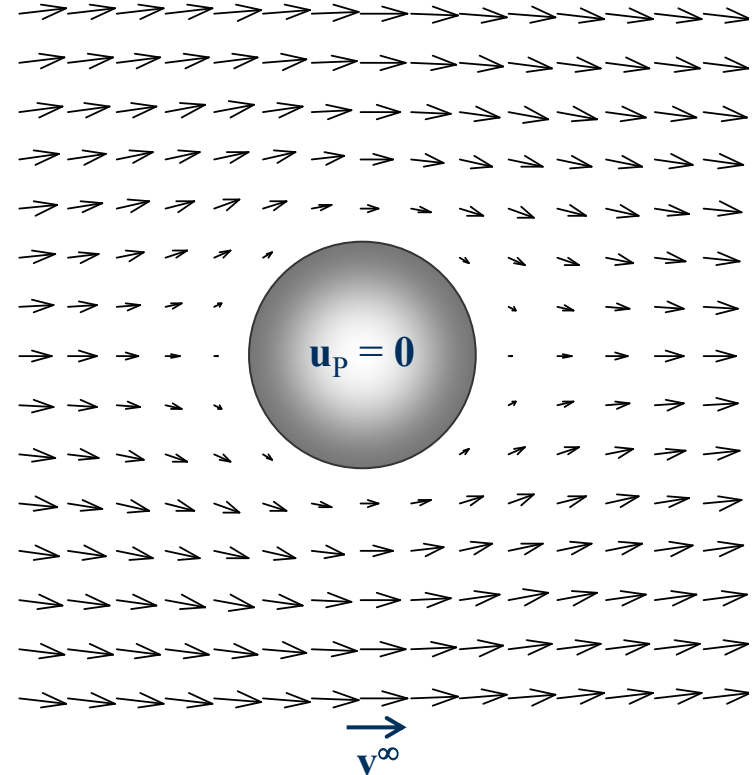
- Geschwindigkeitsgradient entlang der Stromlinien
- z.B. in Düsen, bei Partikelumströmung

Geschwindigkeitsfeld um eine bewegte Kugel

für ruhenden Beobachter:



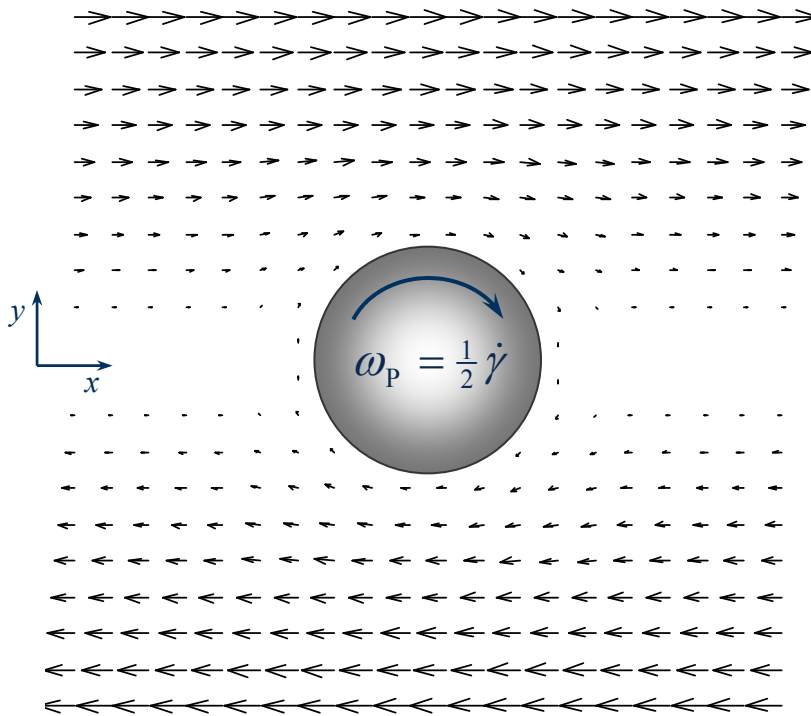
aus Sicht des Partikels:



v^∞ ... ungestörtes Geschwindigkeitsfeld

Partikel im Scherfeld

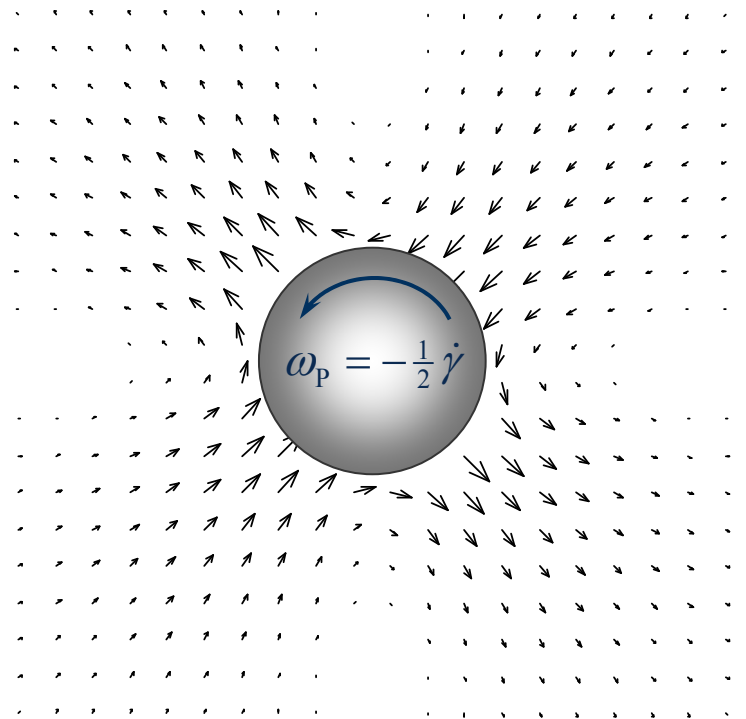
für ruhenden Beobachter:



$$\mathbf{v}^\infty: v_x = \dot{\gamma} \cdot y$$

\mathbf{v}^∞ ... ungestörtes Geschwindigkeitsfeld

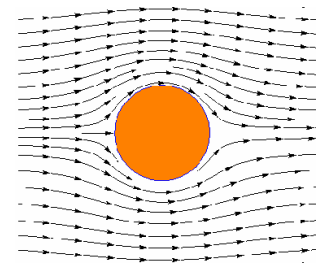
Abweichung vom originalen Scherfeld:



2.2 Einzelpartikelbewegung

- Stationäre, schleichende Umströmung -

Stationäre, schleichende Kugelumströmung



- Annahmen: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ $\rho \cdot \mathbf{f} = 0$
- Navier-Stokes-Gl.: $\nabla p = \eta \cdot \Delta \mathbf{v}$
- Randbedingungen: $\mathbf{v}(r = a) = \mathbf{u}_p$ $\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) = \mathbf{v}^\infty$ $U = |\mathbf{v}^\infty - \mathbf{u}_p|$
- Strömungsfeld: $v_r = U \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right)$ $v_\theta = -U \sin \theta \cdot \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right)$
- Druckfeld: $p = p_0 - \frac{3\eta a}{2r^2} \cdot U \cos \theta$
- Normal+Tangentialspanng. $\Pi_{rr}^{diss} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}$ $\Pi_{r\theta}^{diss} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$
- Strömungskraft: $F = -\int_S p \cos \theta dS + \int_S \Pi_{rr}^{diss} \cos \theta dS - \int_S \Pi_{r\theta}^{diss} \sin \theta dS$
 $F = 2\pi\eta a U + 0 + 4\pi\eta a U$
 $\mathbf{F}_W = 6\pi\eta a \cdot \mathbf{v}_{rel}$ mit $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}^\infty - \mathbf{u}_p$ (Stokessches Gesetz)
- symmetrisches Strömungsfeld \rightarrow kein Drehmoment

Widerstandsbeiwert von Kugeln für kleine Re_p

- Stokes (umströmte Kugel):

- Randbedingung: $\mathbf{v}(r = a) = \mathbf{0}$
- Annahme: $\rho \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \ll \eta \Delta \mathbf{v}$ bzw. $Re_p < 1$
- Geschwindigkeit: $v_r = U \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right)$
- Widerstandsbeiwert: $c_w = \frac{24}{Re_p}$

- Kritik an Stokes:

- für $r \gg a$: $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}^\infty$ $\mathbf{v} - \mathbf{v}^\infty \sim 1/r$
- folglich: $\nabla \mathbf{v} \sim 1/r^2$ $\Delta \mathbf{v} \sim 1/r^3$ $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim 1/r^2$
- d.h., $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim r \cdot \Delta \mathbf{v}$

Die Lösung widerspricht für $r \gg a$ der zugrunde liegenden Annahme.

- analytische Korrekturen:

- Oseen (1913): $c_w = \frac{24}{Re_p} \cdot \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right)$
- Goldstein (1929): $c_w = \frac{24}{Re_p} \cdot \left(1 + \frac{3}{16} Re_p - \frac{19}{1280} Re_p^2 + O(Re_p^3) \right)$

Mobilität für kleine Partikel-Reynoldszahlen

- hydrodynamischen Widerstand

- mechan./hydrodynam. Mobilität:
$$\mu_{\text{hd}} = \frac{v_{\text{P}}}{F_{\text{W}}} = \frac{1}{3\pi\eta x}$$

- Elektrophorese in Gasen

- elektrostatische Mobilität:
$$\mu_{\text{es}} = \frac{v_{\text{rel}}}{|\mathbf{E}|} = \mu_{\text{hd}} \cdot Q_{\text{P}} = \frac{Q_{\text{P}}}{3\pi\eta x}$$

- Elektrophorese in (polaren) Flüssigkeiten

- elektrophoretische Mobilität:
$$\mu_{\text{ep}} = \frac{v_{\text{rel}}}{|\mathbf{E}|} = \mu_{\text{hd}} \cdot Q_{\text{diff}} = \frac{3\pi x \cdot \epsilon_0 \epsilon_{\text{m}} \zeta}{3\pi\eta x} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{\text{m}} \zeta}{\eta}$$

- Brownsche Bewegung

- Diffusionskoeffizient
$$D_{\text{P}} = \mu_{\text{hd}} \cdot \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{k_{\text{B}} T}{3\pi\eta x}$$

- Sedimentation

- Sinkgeschwindigkeit:
$$v_{\text{Stokes}} = \mu_{\text{hd}} \cdot (F_{\text{G}} - F_{\text{A}}) = \frac{g\Delta\rho}{18\eta} x^2$$

Umströmte Tropfen und Blasen

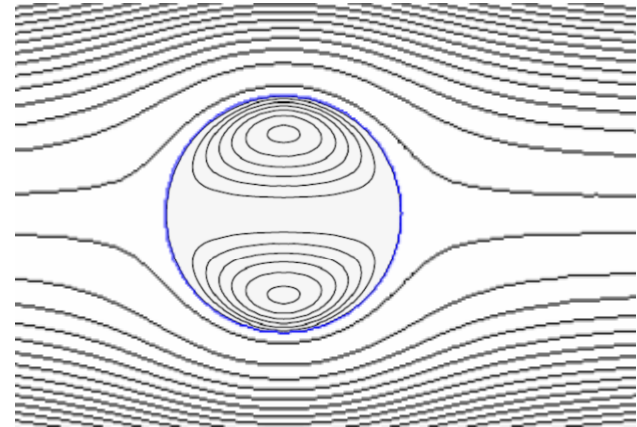
- fluide Partikel: äußere Strömung induziert innere Strömung
- abhängig von innerer Viskosität (u.U. auch von der Viskosität eines Grenzflächenfilmes)
- geringere Strömungskräfte als bei festen Partikeln

– allgemein:
$$\mathbf{F}_W = 6\pi\eta a \cdot \frac{2\eta + 3\eta'}{3\eta + 3\eta'} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

– Gasblasen:
$$\mathbf{F}_W = 4\pi\eta a \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

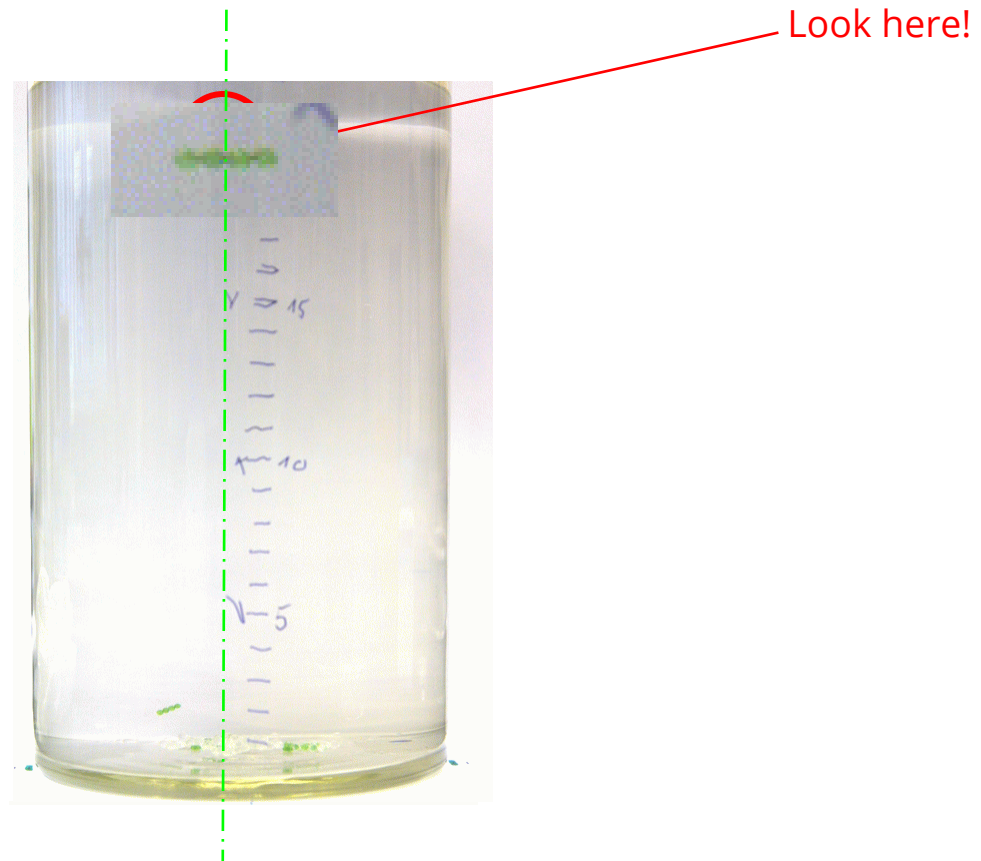
- große Tropfen & Blasen werden durch Strömungskräfte verformt

äußeres & inneres Strömungsfeld von Tropfen im Stokes-Bereich



Verformung aufsteigende Blasen

Sedimentation nicht-sphärischer Partikel



- Strömungswiderstand schräg zur Anströmung → seitliche Drift
- strömungsinduziertes Drehmoment → Partikelrotation

Strömungswiderstand nicht-sphärischer Partikel

- Einfluss der Partikelorientierung
- Rotation der Partikel
- Widerstandskraft nicht unbedingt parallel zur Relativgeschwindigkeit
 - seitliche Drift
 - Berechnung $\mathbf{F}_W = 3\pi\eta x_{h,t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_{rel}$ wobei \mathbf{T} = Translationsmatrix
- ggf. Taumelbewegung
- analytische Beschreibung höchst kompliziert
- empirische Berechnungsgleichungen, z.B.

– Ansatz:
$$c_{W,P} = \frac{F_W}{A_Q(x_V) \frac{\rho}{2} v_{rel}^2} = c_{W,K}(x_V) \cdot f_{shape}(x_V, \Psi)$$

– Stokes:
$$c_{W,P} = \frac{24}{Re_P(x_V)} \cdot \frac{1}{k_{\Psi,Stokes}(x_V, \Psi)} \quad \text{mit} \quad k_{\Psi,Stokes}(x_V, \Psi) = 0.843 \cdot \lg \frac{\Psi}{0.065}$$

– Newton:
$$c_{W,P} = 0,44 \cdot \frac{1}{k_{\Psi,Newton}(x_V, \Psi)^2} \quad \text{mit} \quad k_{\Psi,Newton}(x_V, \Psi) = \sqrt{\frac{1}{1+11.1(1-\Psi)}}$$

für $\Psi > 0.65$

Partikelbewegung in Gasen

- Gase sind kompressibel
 - für Geschwindigkeitsfeld im Gas gilt: $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$
 - relevant für große Partikel, schnelle Bewegung
- Gase besitzen geringe Dichte → relativ große Molekülabstände
Gase sind kein viskosen Kontinua, sondern „Wolken“ diskreter, sich schnell bewogender Moleküle
 - z. B. Luft bei 25°C, 1 bar:
 - mittlerer Molekülabstand ca. 3 nm, mittlere freie Weglänge: $\lambda_m \approx 66$ nm

– Knudsen-Zahl:
$$Kn = \frac{\text{mittlere freie Weglänge } \lambda_m}{\text{Partikelradius } a}$$

– freier Molekularbereich ($Kn \gg 1$):
$$F_w = 6\pi\eta a \cdot \frac{a}{A \cdot \lambda_m} \cdot v_{\text{rel}} \quad , A \approx 1,654$$

(feinste Aerosolpartikel, niedrige Drücke)

– Cunningham-Korrektur für $Kn > 1$:
$$F_w = 6\pi\eta a \cdot v_{\text{rel}} / C(Kn)$$

Näherung

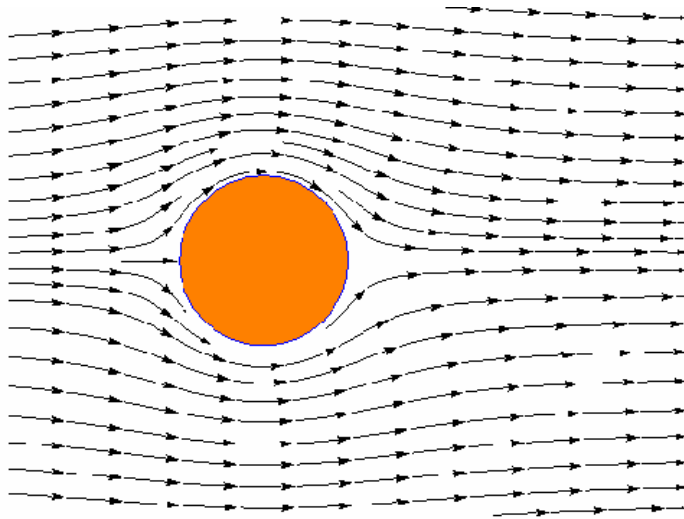
$$C(Kn) \approx 1 + A \cdot Kn$$

2.3 Einzelpartikelbewegung

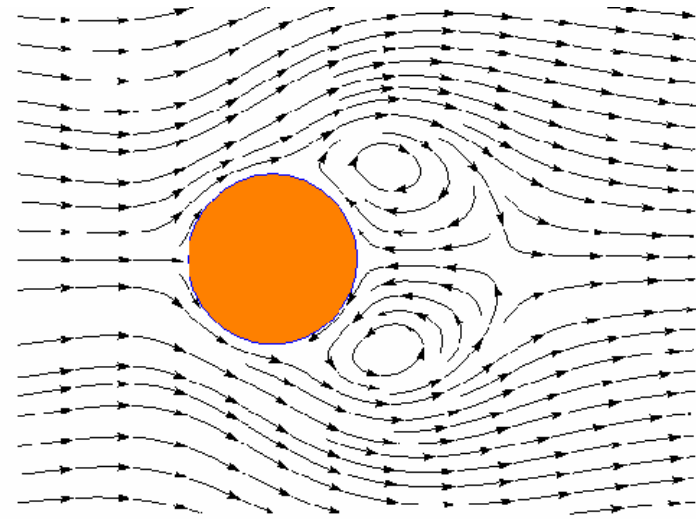
- stationäre Bewegung außerhalb des Stokes-Bereiches -

Umströmung außerhalb des Stokes-Bereichs

Stokes-Bereich, $Re = 1$



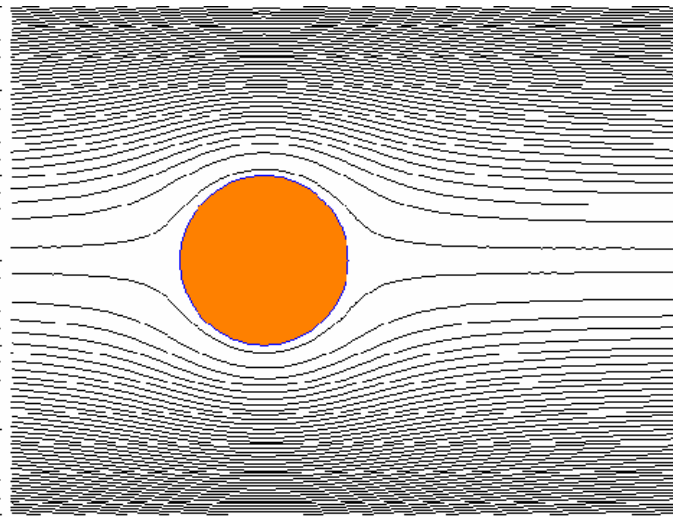
Wirbelschleppe, $Re=500$



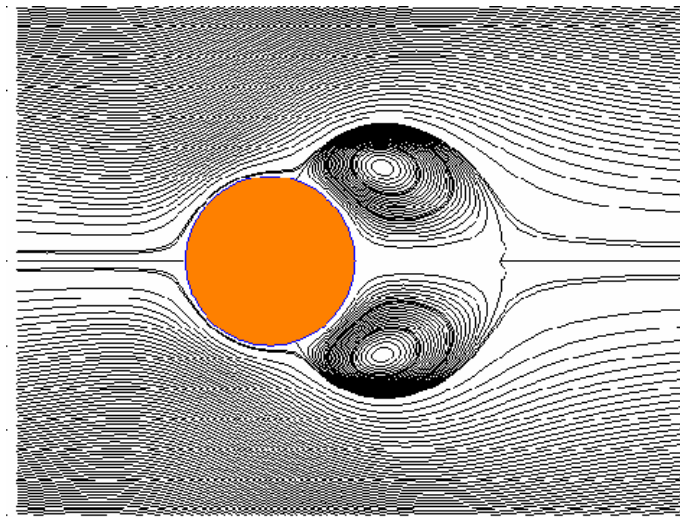
- berechnet mit Wolfram CDF player (numerische Lösung der N-St-Gleichungen)

Umströmung außerhalb des Stokes-Bereichs

Stokes-Bereich, $Re = 1$



Wirbelschleppe, $Re=500$



- berechnet mit Wolfram CDF player (numerische Lösung der N-St-Gleichungen)

Bereiche der Kugelumströmung

- stationäres Strömungsfeld
 - schleichend, axialsymmetrisch*: $Re < 0.2$ ♦
 - ablösungsfrei, axialsymmetrisch*: $Re = 0.2 \dots 20$ ♦
 - Ablösungen, ebensymmetrisch: $Re = 20 \dots 200$ ♦
(stationäre Wirbel),
- zeitlich periodisches Strömungsfeld
 - keine Wirbelstraße, ebensymmetrisch: $Re = 200 \dots 270$ ♦
 - period. Wirbelstraße, ebensymmetrisch: $Re = 270 \dots 300$ ♦
- zeitlich chaotisch
 - chaotische Wirbelstraße, asymmetrisch: $Re > 350$ ♦

* für sehr große Abstände gilt dies nicht (s. Kritik von Oseen)

♦ die angegebenen Zahlenwerte beschreiben die ungefähren Grenzen der Strömungsbereiche

Widerstandsbeiwert von Kugeln für beliebige Re_p

Widerstandsbeiwert:

$$c_W = F_W / A_Q \frac{\rho}{2} v_{\text{rel}}^2$$

STOKES-Regime:
($Re_p < 0,5$)

$$c_W = \frac{24}{Re_p}$$

NEWTON-Regime:
($10^3 < Re_p < 2 \cdot 10^5$)

$$c_W \approx 0,44$$

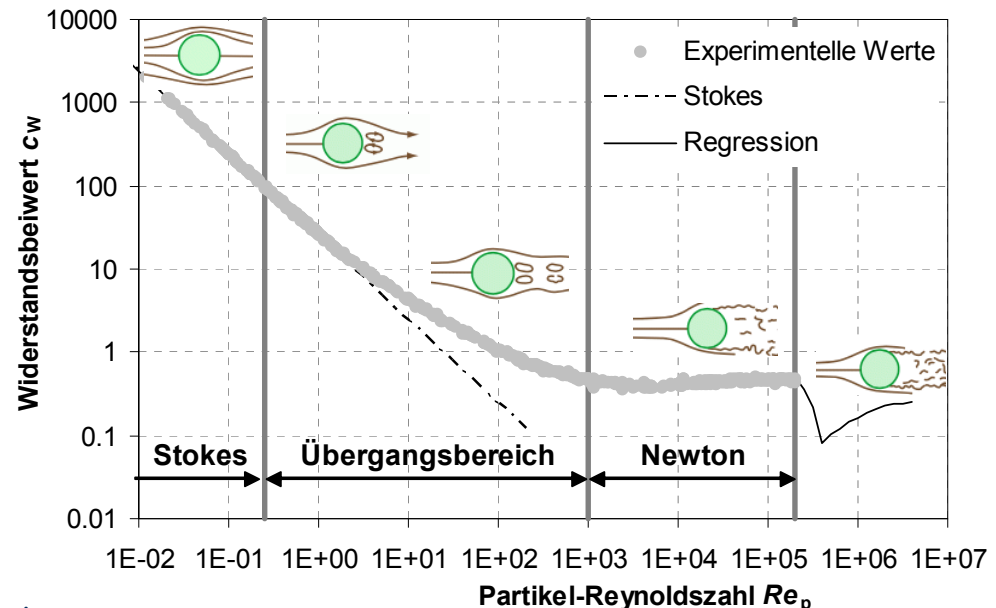
Übergangsbereich:
($0,5 < Re_p < 10^3$)

$$c_W = \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{\sqrt{Re_p}} + 0.4$$

(Kaskas, 1964)

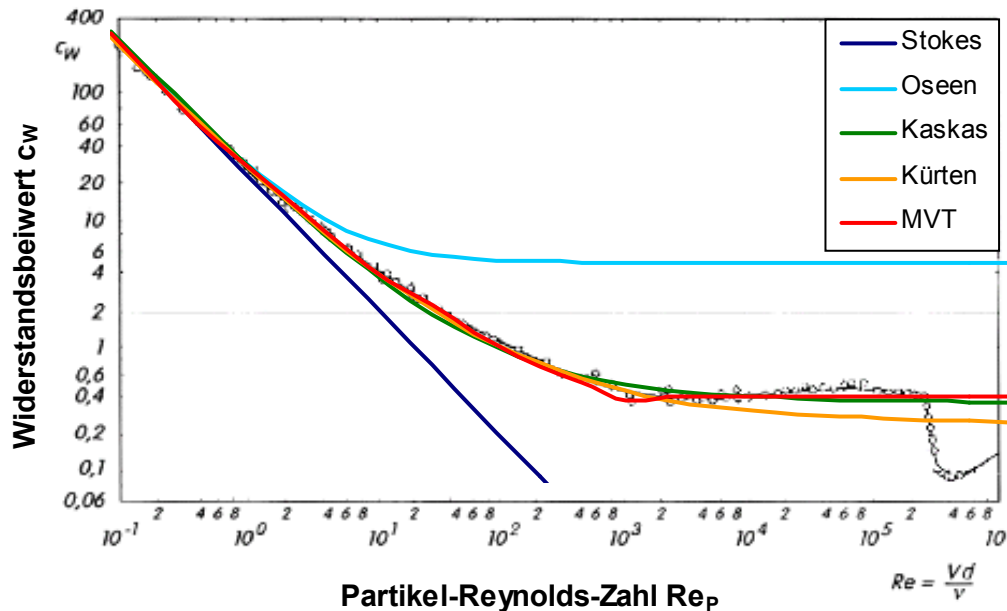
$$c_W = \frac{B_k}{Re_p^{A_k}}$$

(Mednikov, 1980)



Die Zahl wissenschaftlicher Publikationen und empirischer Berechnungsgleichungen für den Widerstandsbeiwert scheint nahezu unbegrenzt.

Vergleich mit experimentellen Daten



Kaskas:

$$c_w = \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{\sqrt{Re_p}} + 0.4$$

Kürten:

$$c_w = \frac{21}{Re_p} + \frac{6}{\sqrt{Re_p}} + 0.28$$

MVT:

$$c_w = \frac{B}{Re_p^A}$$

Bild 1.19. Widerstandsbeiwert von Kugeln in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl

Kurve 1: Theorie nach G.G. Stokes (1856), $c_w = 24/Re$

Kurve 2: Theorie nach C.W. Oseen (1911), $c_w = (24/Re)[1 + 3Re/16]$

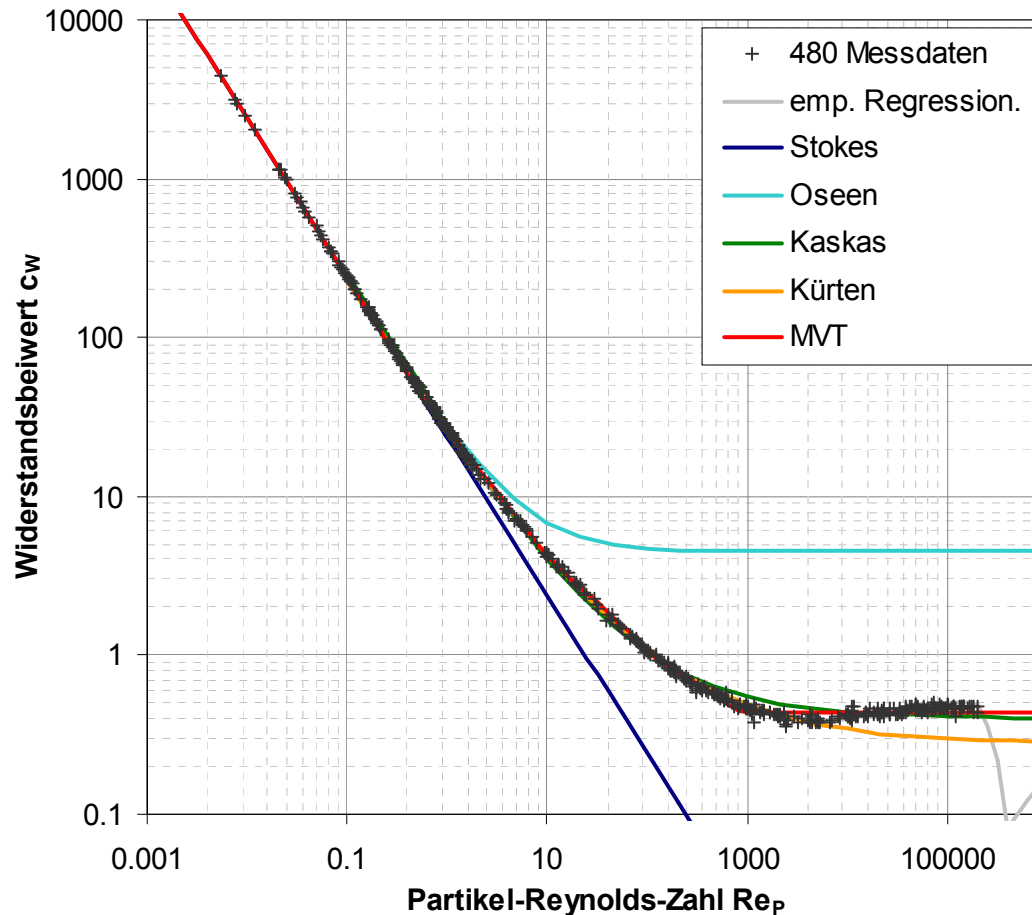
Zur Erweiterung dieser Gleichung für höhere Reynolds-Zahlen vgl. M. Van Dyke (1964b)

Kurve 3: Numerische Ergebnisse nach B. Fornberg (1988)

Einsetzen instationärer Strömung bei $Re = 200$, vgl. U. Dallmann et al. (1993)

Schlichting & Gersten, *Grenzschichttheorie*, Springer-Verlag, 2006; doi:10.1007/3-540-32985-4

Vergleich mit experimentellen Daten



experim. Daten zusammengestellt von: Brown & Lawler, *J. Environ. Eng.*, 129:222-231, 2003.

Sinkgeschwindigkeit kugeliger Partikel

- dim.-loser Ansatz mit Ljaščenko- und Archimedes-Zahl

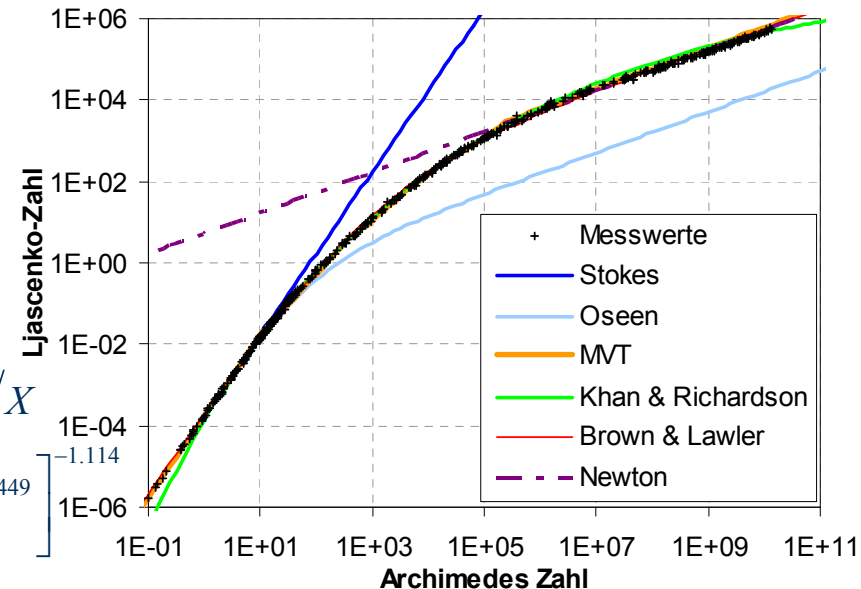
$$Lj = \text{funct.}(Ar) \quad Lj = \frac{\rho^2 v_S^3}{g \Delta \rho \eta} \quad Ar = \frac{g \Delta \rho \rho x^3}{\eta^2}$$

- dim.-loser Ansatz nach Grassmann & Reinhardt (1961)

$$V_S = \text{funct.}(X) \quad V_S = Lj^{\frac{1}{3}} \quad X = Ar^{\frac{1}{3}}$$

Beispiele:

- nach Stokes: $Lj = Ar^2 / 18^3$
- nach Oseen: $Lj = \frac{128}{81} \cdot \left(\frac{2 + \frac{1}{48} Ar}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{24} Ar}} - 1 \right)$
- MVT-Ansatz: $Lj = \left(\frac{4}{3} / B \right)^{\frac{3}{2-A}} \cdot Ar^{\frac{1+A}{2-A}}$
- Khan & Richardson: $V_S = \left(2.33 \cdot X^{0.054} - 1.53 \cdot X^{0.048} \right)^{13.3} / X$
- Brown & Lawler: $V_S = \left[\left(18 / X^2 \right)^{0.898 \cdot \frac{0.936 \cdot X + 1}{X + 1}} + \left(0.317 / X \right)^{0.449} \right]^{-1.114}$
- Newton-Bereich: $Lj \approx 5.275 \cdot \sqrt{Ar}$



Sinkgeschwindigkeit für gegebenen Kugeldurchmesser

aus Funktion $Re_p(Ar)$

allgemein:

$$v_S = \frac{\eta_F}{\rho_F \cdot x} \cdot Re_p(Ar)$$

Beispiele:

- nach Stokes:

$$Re_p = \frac{Ar}{18}$$

- nach Newton:

$$Re_p = \sqrt{\frac{Ar}{0.33}}$$

- Potenzansatz:

$$Re_p = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{Ar}{B} \right)^{\frac{1}{2-A}}$$

stückweise definiert

- Khan & Richardson (1987): für $Ar = 3 \dots 10^5$

$$Re_p = \left(2.33 \cdot Ar^{0.018} - 1.53 \cdot Ar^{-0.016} \right)^{13.3}$$

- Martin (2013):

$$Re_p = 18 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{9} \sqrt{Ar}} - 1 \right)^2$$

etwas größere Näherung

aus Funktion $Lj(Ar)$

allgemein:

$$v_S = \left(\frac{g \Delta \rho \eta_F}{\rho_F^2} \cdot Lj(Ar) \right)^{1/3}$$

Beispiele:

- nach Stokes:

$$Lj = \frac{Ar^2}{18^3}$$

- nach Newton:

$$Lj = \sqrt{\frac{Ar}{0.33^3}}$$

- Potenzansatz:

$$Lj = \left(\frac{4}{3 \cdot B} \right)^{\frac{3}{2-A}} \cdot Ar^{\frac{1+A}{2-A}}$$

stückweise definiert

- nach Khan & Richardson (1987): für $Ar = 3 \dots 10^5$

$$Lj = \left(2.33 \cdot Ar^{0.018} - 1.53 \cdot Ar^{-0.016} \right)^{39.9} / Ar$$

- Brown & Lawler (2003): für $Ar \geq 3$

$$Lj = \left[\left(18 / Ar^{\frac{2}{3}} \right)^{0.898 \cdot \frac{0.936 \sqrt[3]{Ar+1}}{\sqrt[3]{Ar+1}}} + \left(0.317 / Ar^{\frac{1}{3}} \right)^{0.449} \right]^{-3.342}$$

Kugeldurchmesser für gegebene Sinkgeschwindigkeit

aus Funktion $Re(Lj)$

allgemein:

$$x = \frac{\eta_F}{\rho_F \cdot v_S} \cdot Re_p(Lj)$$

Beispiele:

- nach Stokes: $Re_p = \sqrt{18 \cdot Lj}$
- nach Newton: $Re_p = 0.33 \cdot Lj$
- Potenzansatz: $Re_p = \left(\frac{3}{4} \cdot B \cdot Lj \right)^{\frac{1}{1+A}}$
stückweise definiert
- Khan & Richardson (1987): für $Ar = 3 \dots 10^5$
 $Re_p = \left(1.47 \cdot Lj^{0.14} + 0.11 \cdot Lj^{0.4} \right)^{3.56}$

aus Funktion $Ar(Lj)$

allgemein:

$$x = \left(\frac{\eta_F^2}{g \Delta \rho \rho_F} \cdot Ar(Lj) \right)^{1/3}$$

Beispiele:

- nach Stokes: $Lj = \sqrt{18^3 \cdot Lj}$
- nach Newton: $Ar = 0.33^3 \cdot Lj^2$
- Potenzansatz: $Ar = \left(\frac{3}{4} B \right)^{\frac{3}{1+A}} \cdot Lj^{\frac{2-A}{1+A}}$
stückweise definiert
- Concha & Almedra (1979): für $Lj \geq 10^{-4}$
 $Ar = 0.0525^3 \cdot Lj^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{79.1}{\sqrt{Lj}}} \right)^6$
- Whiten & Özer (2015): für $Lj \geq 0.003$
 $\ln Ar = 1.8959 \ln Lj - 12.0333 + \dots$
 $3 \cdot \sqrt{(4.6865 - 0.4879 \ln Lj)^2 + 10.0518}$

Widerstandsbeiwert von Partikeln – Literatur

- J. Hadamard, Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *CR Hebd. Seance Acad. Sci.*, 152(25):1735-1738, **1911**.
- G. H. Ganser, A rational approach to drag prediction of spherical and nonspherical particles. *Powder Technol.*, 77(2):143-152, **1993**; doi: 10.1016/0032-5910(93)80051-B
- P. P. Brown and D. F. Lawler, Sphere drag and settling velocity revisited. *J. Environ. Eng.*, 129:222-231, **2003**; doi: 10.1061/(ASCE)0733-9372(2003)129:3(222)
- N.-S. Cheng, Comparison of formulas for drag coefficient and settling velocity of spherical particles. *Powder Technol.*, 189:395-398, **2009**; doi: 10.1016/j.powtec.2008.07.006
- G. I. Kelbaliyev, Drag coefficients of variously shaped solid particles, drops, and bubbles. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 45(3):248-266, **2011**; doi: 10.1134/S0040579511020084
- W. J. Whiten, C. E. Özer, New relation for the computation of settling velocities and diameters of spheres. *Miner. Process. Extr. Metall. Rev.*, 36(2):92-102, **2015**; doi: 10.1080/08827508.2014.885904
- S. Dey, S. Z. Ali, E. Padhi, Terminal fall velocity: The legacy of Stokes from the perspective of fluvial hydraulics. *Proc. R. Soc. A*, 475:20190277 (33 pp.), **2019**; doi: 10.1098/rspa.2019.0277