1. Hausaufgabe - Geometrie

23.04.23
Toni Ehrenchen
3951871

Aufgabe 16. *(Aufgabe 2.1.2)* **(6P)** Führen Sie zum Neun-Punkte-Modell der Inzidenzgeometrie, Beispiel 2.1.7, die folgenden Untersuchungen durch:

a) Welche Menge ist die Gerade P_2P_8 durch P_2 und P_8?

b) Bestimmen Sie alle Parallelen zur Geraden P_4P_9 durch den Punkt P_1.

c) Veranschaulichen Sie sich das Neun-Punkte-Modell, indem sie die neun Punkte in einem quadratischen Gitter mit P_1, P_2 und P_3 auf der oberen Linie, P_4, P_5 und P_6 auf der mittleren Linie und P_7, P_8 und P_9 auf der unteren Linie anordnen und Punkte, die auf einer Geraden liegen, mit einer Linie (Strecke oder Zusammensetzung aus Strecke und Bogen symbolisch verbinden. Markieren Sie dabei die Geraden P_4P_9 und P_6P_8 mit der gleichen Farbe. Versuchen Sie dabei, die Graphik mit möglichst vielen Symmetrien zu versehen.

Seien $P_1, \dots, P_9$ paarweise verschiedene Punkte. Das Neun-Punkte-Modell ist gegeben durch die Mengen

$$\mathbb{P} = \{P_1, \dots, P_9\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G} = \{ &\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_4, P_5, P_6\}, \{P_7, P_8, P_9\}, \\ &\{P_1, P_4, P_7\}, \{P_2, P_5, P_8\}, \{P_3, P_6, P_9\}, \\ &\{P_1, P_5, P_9\}, \{P_2, P_6, P_7\}, \{P_3, P_4, P_8\}, \\ &\{P_1, P_6, P_8\}, \{P_2, P_4, P_9\}, \{P_3, P_5, P_7\} \}.\end{aligned}$$

a) Die Gerade P_2P_8 ist gegeben durch $\{P_2, P_5, P_8\}$.

b) Die Gerade P_4P_9 ist gegeben durch $g := \{P_2, P_4, P_9\}$
Somit sind alle Parallelen zu g, die durch P_1 verlaufen, gegeben durch

$$h := \{P_1, P_6, P_8\}.$$

Es gibt also nur eine solche Gerade.

Alle anderen Geraden in $\mathbb{G}$ verlaufen entweder nicht durch P_1 oder haben eine nichtleere Schnittmenge mit g und sind somit nicht parallel zu g. Somit gibt es nicht mehr Lösungen.

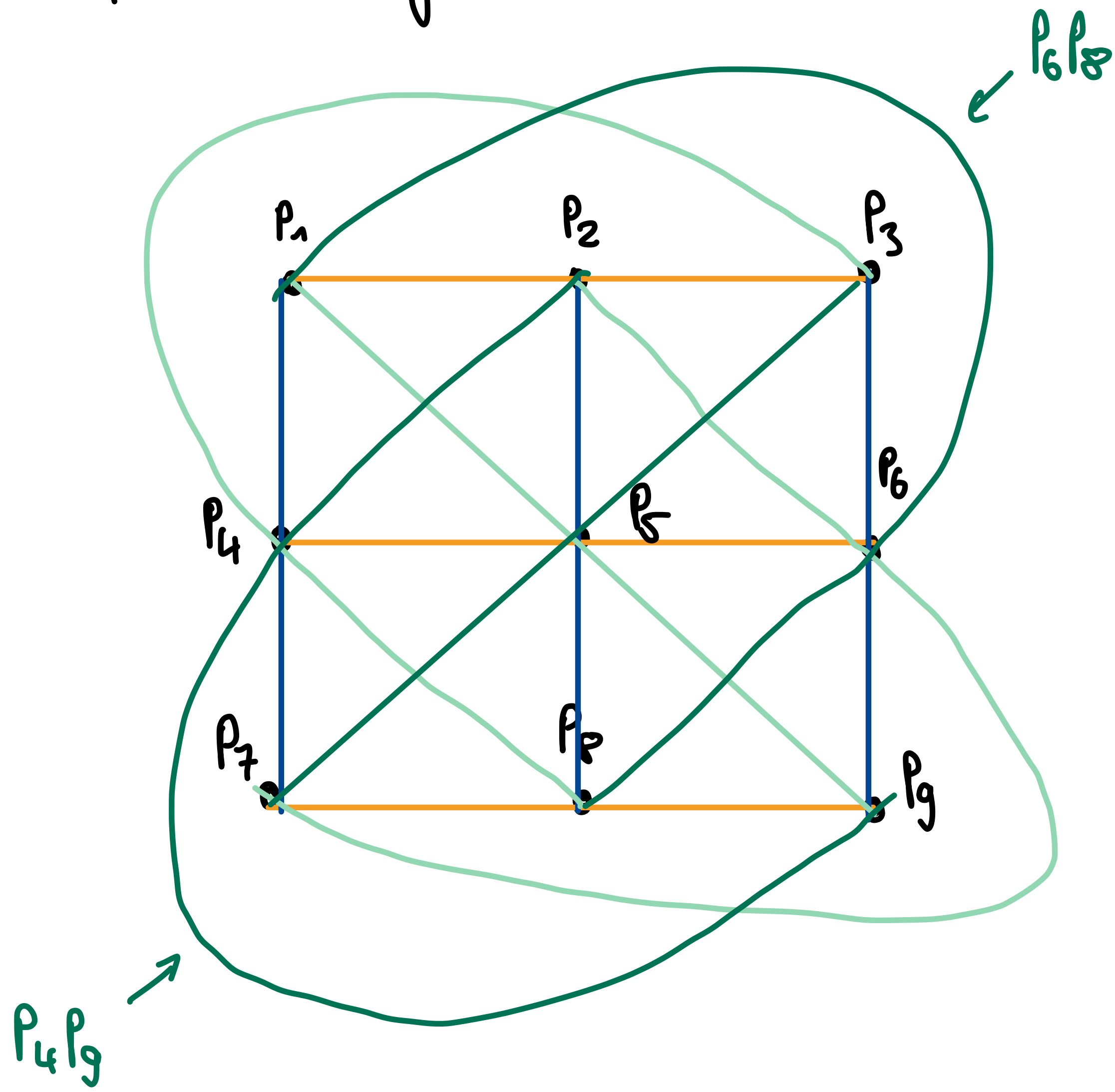
Die Gerade h genügt auch den geforderten Eigenschaften, denn es gilt:

$$P_1 \in h \wedge g \cap h = \emptyset$$

und damit

$$P_1 \in h \wedge g \parallel h.$$

c)



Bemerkung: Gleichfarbige Geraden sind parallel zueinander.

Aufgabe 17. *(Aufgabe 2.3.4)* **(6P)** Beweisen Sie Satz 2.3.2 zur Äquivalenzrelationseigenschaft der Parallelität in der affinen Geometrie.

Sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I, \|)$ so, dass die Axiome Inz-0, Aff-1, Aff-2, Aff-3 sowie Aff-5 erfüllt sind. Es sei die Relation $\|$ auf $\mathbb{G}$ wie folgt definiert:

$$\forall g, h \in \mathbb{G}: g \| h :\Longleftrightarrow (g = h) \vee (g \cap h = \emptyset)$$

Dann gilt: $\|$ ist eine Äquivalenzrelation (und damit folgt das Axiom Aff-4).

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach.

(i) Reflexivität:

Sei $g \in \mathbb{G}$ beliebig. Dann ist $g = g$ und damit ist $g \| g$. Aufgrund der Beliebigkeit von g folgt die Reflexivität der Relation.

(ii) Symmetrie:

Seien $g, h \in \mathbb{G}$ beliebig und es gelte $g \| h$.
Falls $g = h$, gilt trivialerweise $h = g \| h = g$. Es sei also nun $g \neq h$. Dann gilt notwendigerweise $g \cap h = \emptyset$.
Aufgrund der Symmetrie des Schnittmengenoperators gilt

$$h \cap g = g \cap h = \emptyset$$

und damit gilt $h \parallel g$. Daraus folgt aufgrund d. Beliebigkeit von g und h die Symmetrieeigenschaft der Relation.

(iii) Transitivität:

Seien $g, h, k \in \mathbb{G}$ und es gelte $g \parallel h$ und $h \parallel k$.

Wir zeigen: $g \parallel k$.

Falls $g = h$ gilt trivialerweise $g = h \parallel k$.

Weiterhin falls $g = k$, gilt wegen (i) $g \parallel g = k$.

Der letzte triviale Fall ist $h = k$, dann ist ebenfalls

$$g \parallel h = k.$$

Seien also g, h und k paarweise verschieden. Dann gilt

$$(g \parallel h \Leftrightarrow g \cap h = \emptyset) \wedge (h \parallel k \Leftrightarrow h \cap k = \emptyset)$$

Wir zeigen: $g \cap k = \emptyset$. Angenommen es existiert ein Punkt $P \in \mathbb{P}$ mit $g \cap k = \{P\}$.

Damit gilt $P \in g$ und $P \in k$. Damit existieren aber für die Gerade h zwei ungleiche Parallen (g und k), auf denen P liegt. Dies widerspricht dem Axiom Aff-5.

Somit muss $g \cap k = \emptyset$ und damit $g \parallel k$ gelten.

Aufgrund der Beliebigkeit von g, h und k folgt die Transitivität der Relation.

$\square$