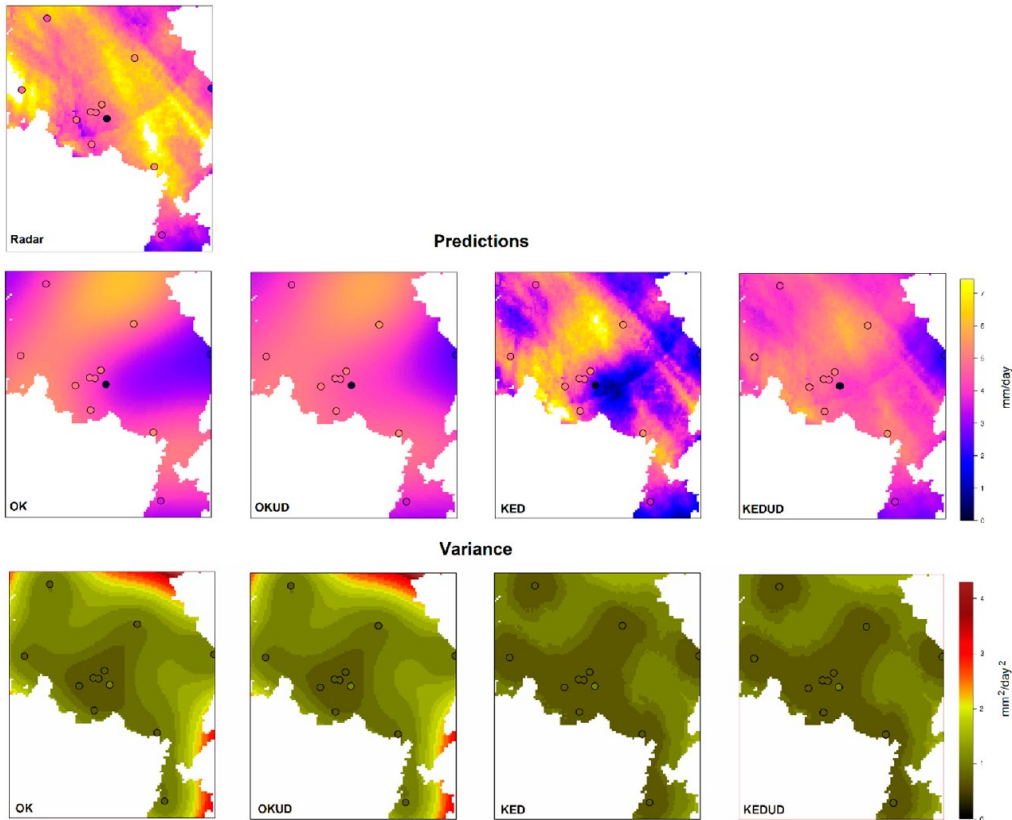


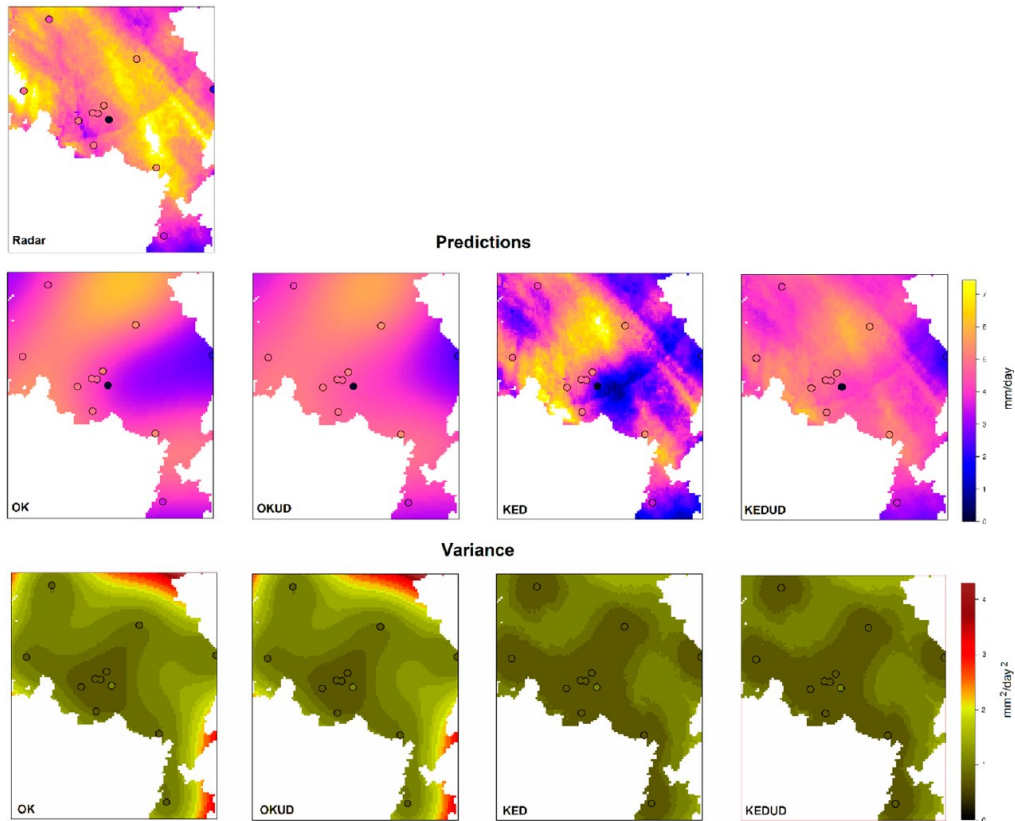
- Kriging (Simple, Ordinary, Universal)
- Conditional Simulation



Cecinati et al.: Considering Rain Gauge Uncertainty Using Kriging for Uncertain Data, Atmosphere (2018)

- Kriging (Simple, Ordinary, Universal)

- ~~Conditional Simulation~~



Cecinati et al.: Considering Rain Gauge Uncertainty Using Kriging for Uncertain Data, Atmosphere (2018)

Der Messwert Z_i an einer Position $x_i \in \mathbb{R}^n$ kann als Zufallsvariable mit **Erwartungswert**

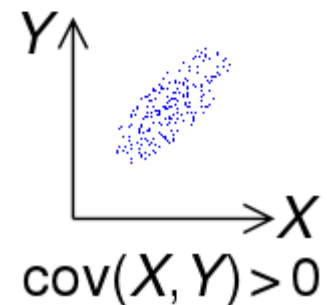
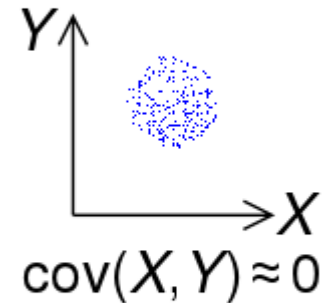
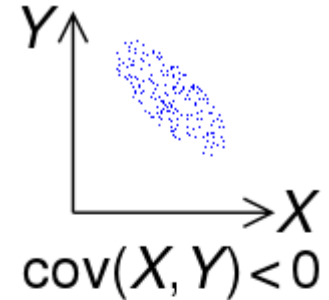
$$E[Z_i] = \int_{\Omega} z d\mu_{Z_i}(z)$$

und **Varianz**

$$\text{Var}(Z_i) = E[(Z_i - E[Z_i])^2].$$

Die **Kovarianz** zwischen zwei Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - E[Z_i])(Z_j - E[Z_j])].$$



Kriging

Der Messwert Z_i an einer Position $x_i \in \mathbb{R}^n$ kann als Zufallsvariable mit **Erwartungswert**

$$E[Z_i] = \int_{\Omega} z d\mu_{Z_i}(z)$$

und **Varianz**

$$\text{Var}(Z_i) = E[(Z_i - E[Z_i])^2].$$

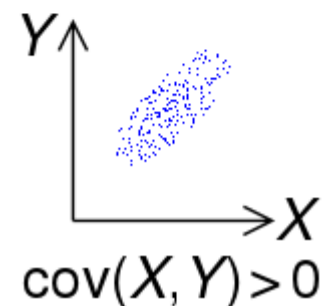
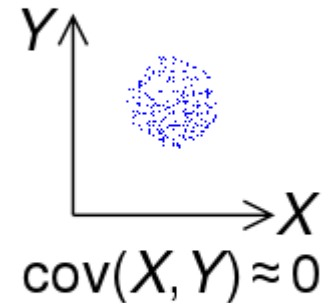
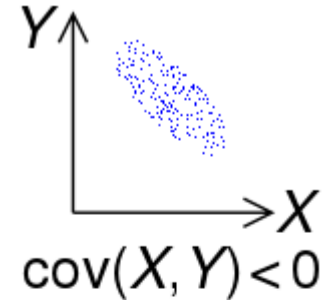
Die **Kovarianz** zwischen zwei Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - E[Z_i])(Z_j - E[Z_j])].$$

In der Geostatistik ist die so genannte **Stationaritäts*-Annahme** von entscheidender Bedeutung:

$$E[Z(x)] = m, \quad \text{Cov}(Z(x + h), Z(x)) = \text{Cov}(h).$$

Die Kovarianz hängt nur vom Inkrement h zwischen Positionen und nicht von den Positionen selbst ab.



* *stationarity, homogeneity*

Die Näherung Z^* von Z ist gegeben durch

$$Z^*(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) Z_i,$$

mit den unbekanntenen Gewichten $\lambda_i(x)$ so dass

$$Z^*(x_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Die Näherung Z^* von Z ist gegeben durch

$$Z^*(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) Z_i,$$

mit den unbekanntenen Gewichten $\lambda_i(x)$ so dass

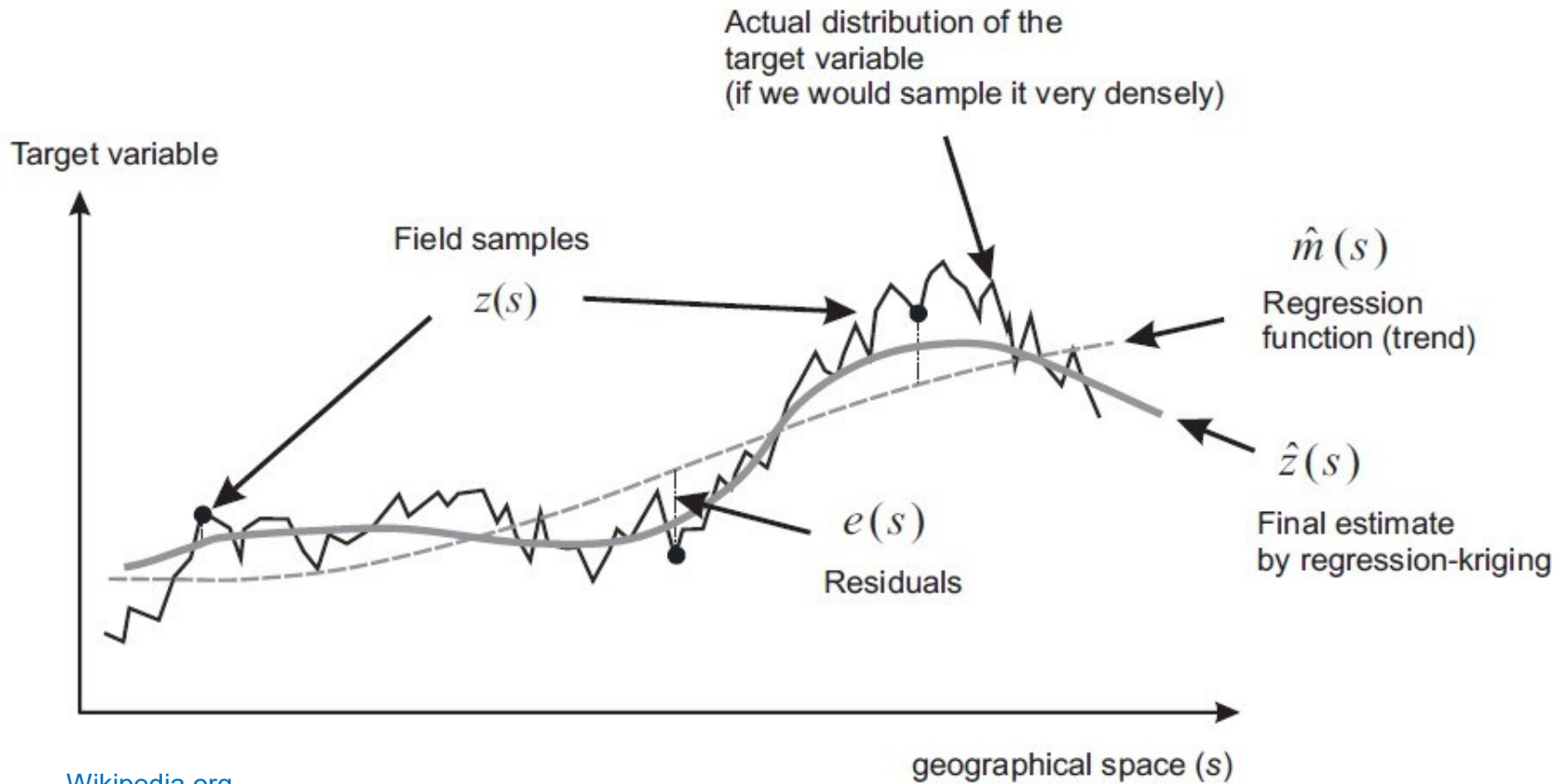
$$Z^*(x_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Welche Annahmen kann man zur Bestimmung der Gewichte treffen?

Unbiasedness (unverfälscht, ideal): $E[Z^*(x)] = E[Z(x)]$

Varianz-Minimierung: $\min_{Z^*} \text{Var}(Z^*(x) - Z(x))$

Kriging



Wikipedia.org

Kriging

Simple Kriging: Erwartungswert $m_0 = E(Z(x))$ ist bekannt; Unbiasedness-Annahme führt zu

$$\lambda_0 = m_0 - \sum_{i=1}^N \lambda_i m_0.$$

Kriging

Simple Kriging: Erwartungswert $m_0 = E(Z(x))$ ist bekannt; Unbiasedness-Annahme führt zu

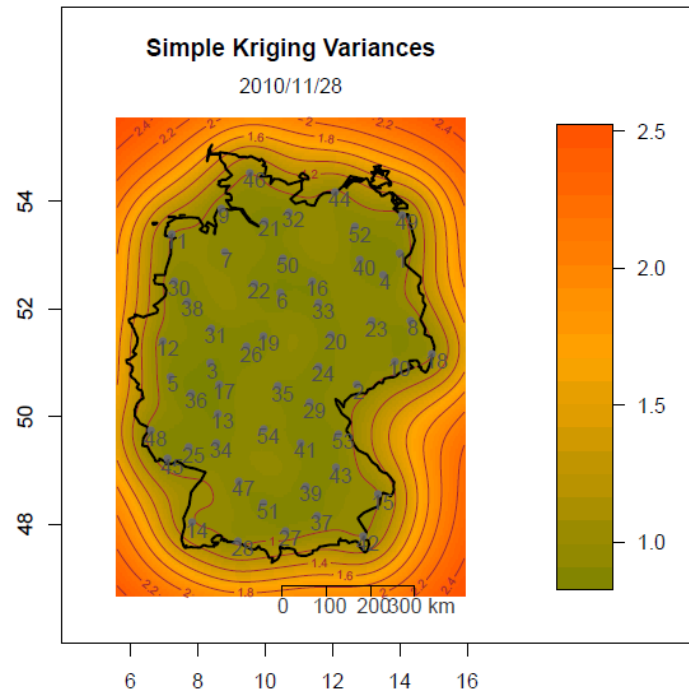
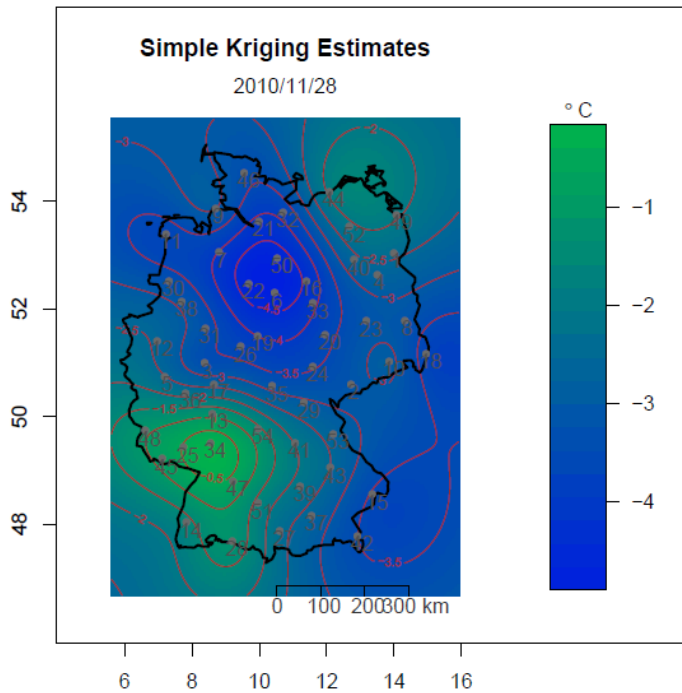
$$\lambda_0 = m_0 - \sum_{i=1}^N \lambda_i m_0.$$

Varianz-Minimierung führt zu:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \text{Cov}(Z_i, Z_k) = \text{Cov}(Z_i, Z(x)), \quad k = 1, \dots, N$$

Aufgrund der Stationaritäts-Annahme gilt: $\text{Cov}(Z_i, Z(x)) = \text{Cov}(|x_i - x|) \rightarrow$ Ähnlichkeit zu radialen Basisfunktionen.

Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

Kriging

Im Allgemeinen ist $\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j))$ nicht bekannt und muss geschätzt oder modelliert werden.

Dafür spielt das so genannte **Variogramm** eine entscheidende Rolle:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x + h)) = C(0) - C(h).$$

Das Variogramm kann unter bestimmten Bedingungen aus den Daten geschätzt werden.

Im Allgemeinen ist $\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j))$ nicht bekannt und muss geschätzt oder modelliert werden.

Dafür spielt das so genannte **Variogramm** eine entscheidende Rolle:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h)) = C(0) - C(h).$$

Das Variogramm kann unter bestimmten Bedingungen aus den Daten geschätzt werden.

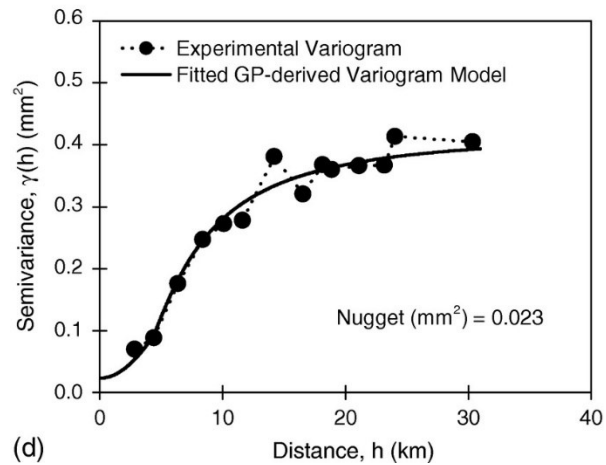
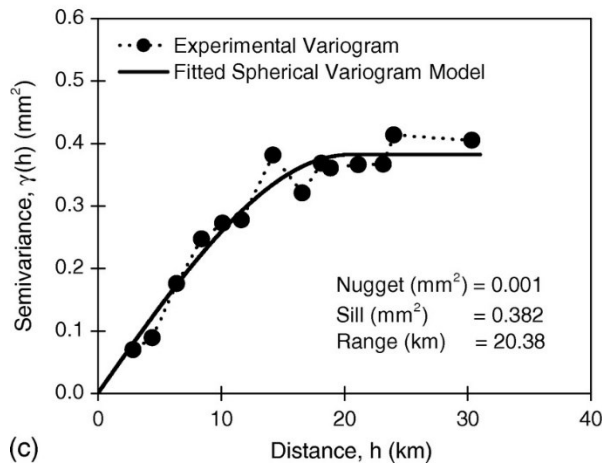
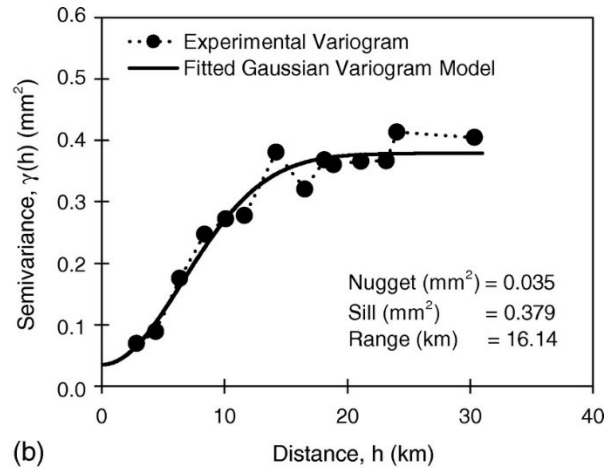
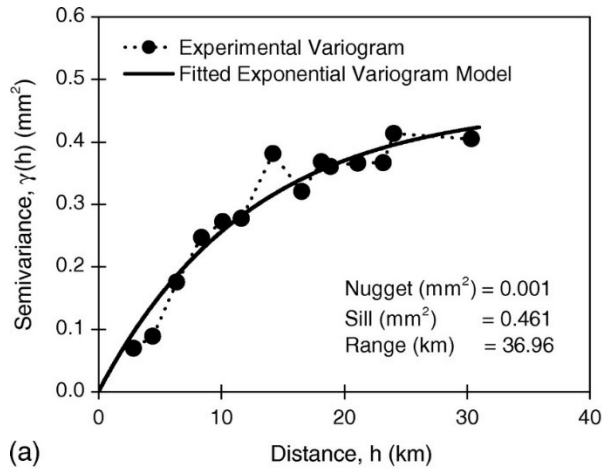
Empirisches Variogramm:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{x_i - x_j = h} (Z_i - Z_j)^2.$$

An das empirischen Variogramms kann ein analytisches Variogrammmodell angepasst werden. Diese Modellfunktion muss dabei bestimmte Eigenschaften erfüllen.

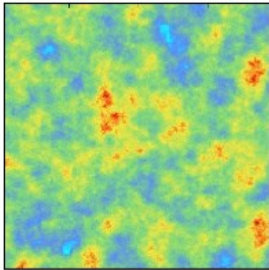
Sie muss z.B. semi-positiv definit sein, d. H. alle Eigenwerte sind größer gleich Null.

Kriging

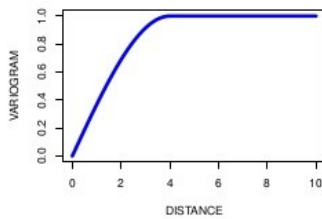


Kriging

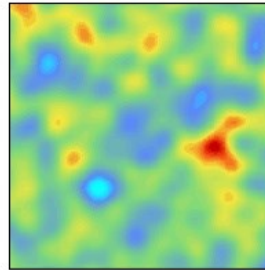
Rough



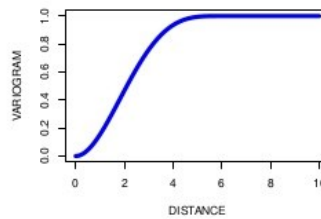
Spherical model



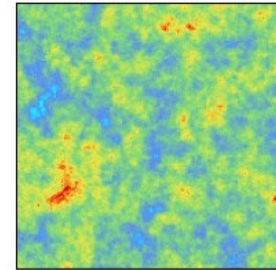
Smooth



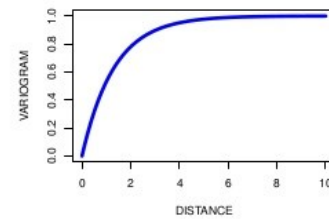
Cubic model



Rough

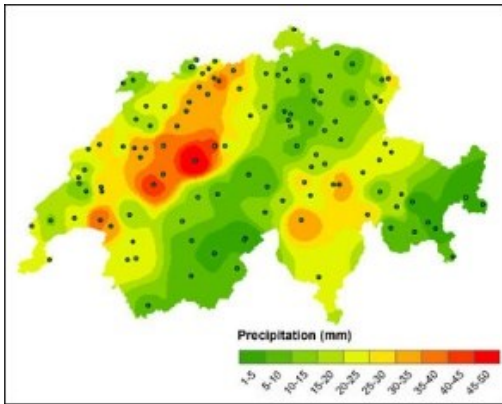
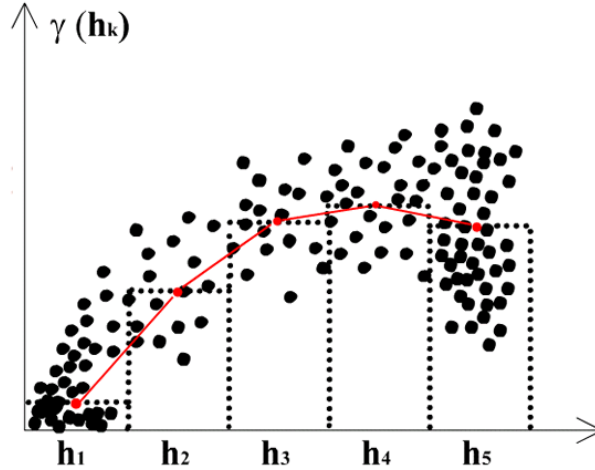


Exponential model

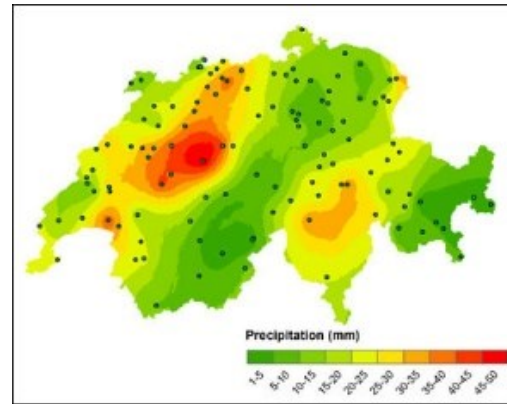


From a presentation by H. Wackernagel

Example IDW, Kriging

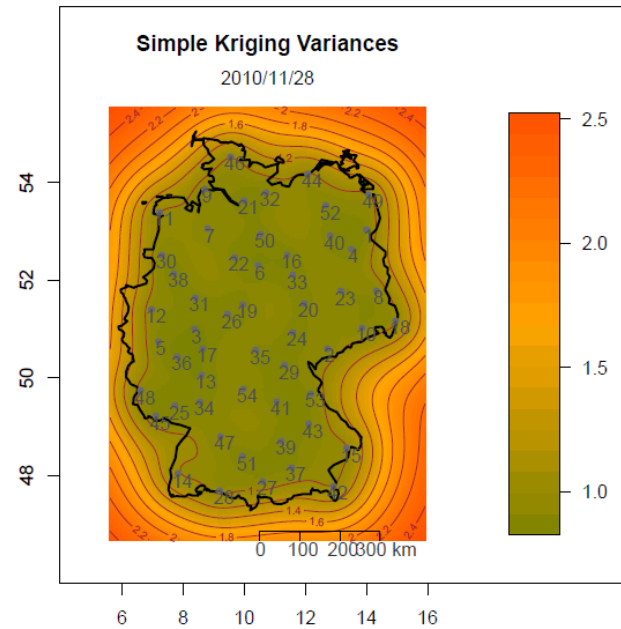
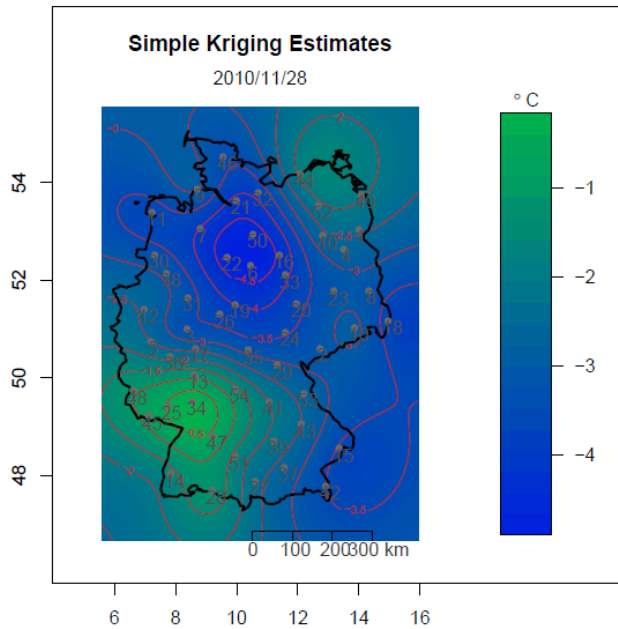


IDW



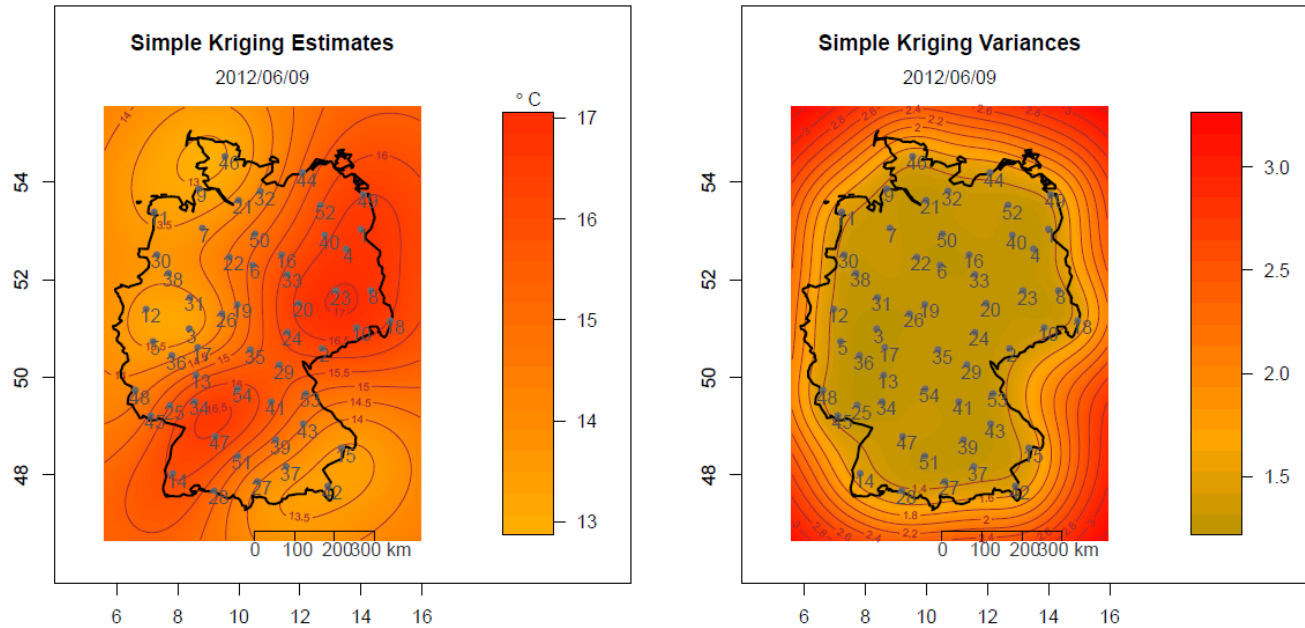
Kriging

Example Kriging



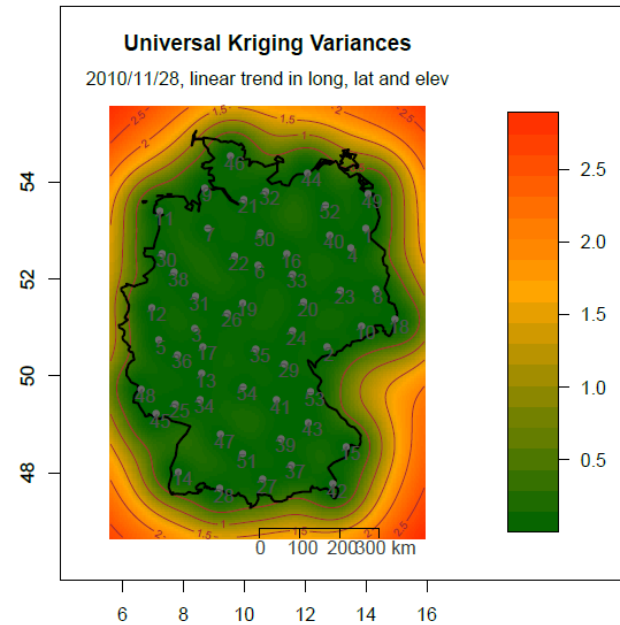
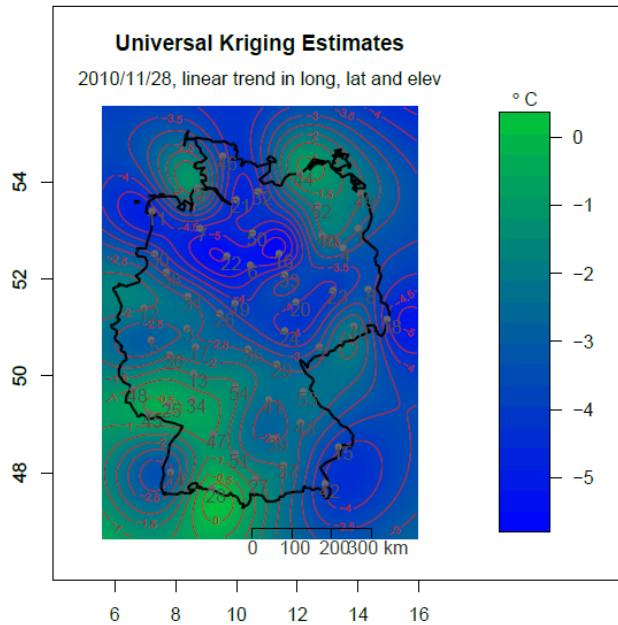
Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

Example Kriging



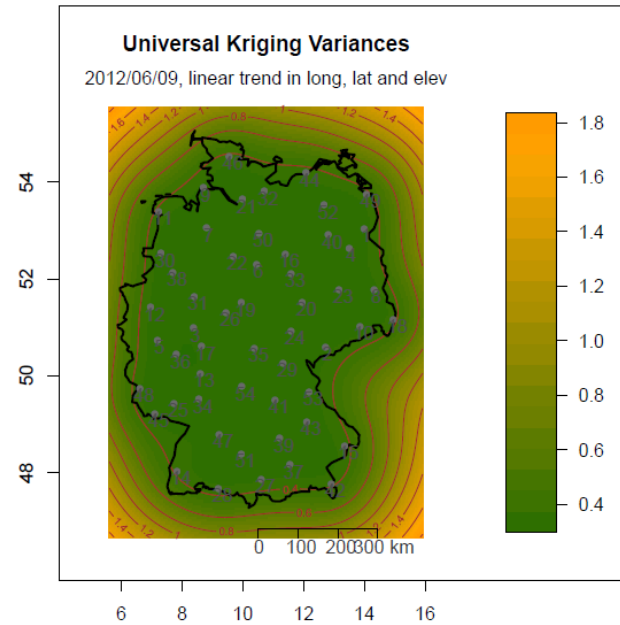
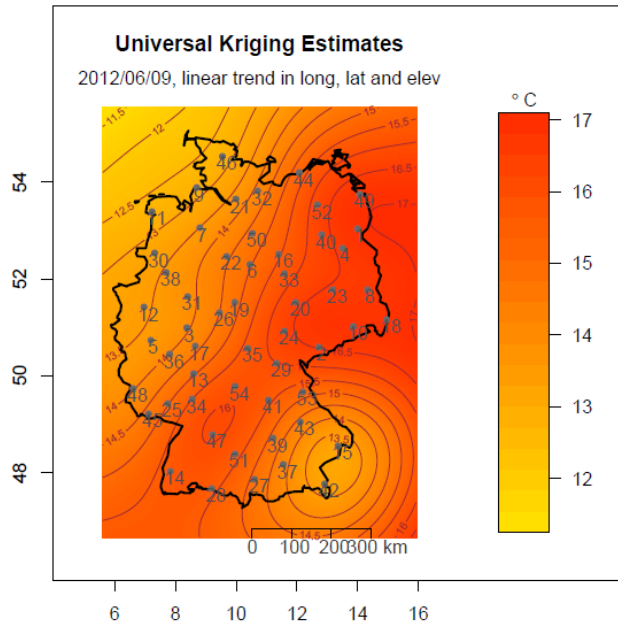
Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

Example Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

Example Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

Ausgangslage:

Gegeben sind bekannte Werte y_i (z.B. Messungen) für einen Parameter an gegebenen Positionen x_i . An beliebigen Positionen x sollen die ggf. unbekanntes Werte y vorhergesagt werden.

Interpolation:

Interpolation umfasst alle mathematischen Verfahren, welche eine Funktion $f(x) = y$ für eine solche Vorhersage verwenden. Klassischerweise hat bei einer linearen Interpolation $f(x)$ die Form eines gewichteten Mittels der gegebenen Werte y_i :

$$f(x) = \sum_i \lambda_i(x) \cdot y_i$$

mit den Gewichten $\lambda_i(x)$. Die Bestimmung der Gewichte hängt vom gewählten Verfahren ab.

Approximation und Interpolation:

Für eine klassische (exakte) Interpolation gilt, dass das Verfahren die Daten exakt reproduziert mit

$$f(x_i) = y_i$$

Bei einer Approximation (oder auch nicht-exakte Interpolation) ist dies nicht der Fall, die Daten werden hier nur angenähert mit

$$f(x_i) = y_i + \epsilon_i \rightarrow f(x_i) \approx y_i$$

ϵ_i ist dabei der unbekanntes Approximationsfehler.

Interpolation und Extrapolation:

Findet die Vorhersage innerhalb der Daten statt, handelt es sich um eine Interpolation. Die Ergebnisse können zumeist als plausibel angesehen werden, da genügend Daten als Randbedingungen für die Vorhersage zu Verfügung stehen.

Findet die Vorhersage außerhalb der Daten oder sehr weit entfernt statt, handelt es sich um eine Extrapolation. Die Ergebnisse können zumeist nicht als plausibel angesehen werden und sollte sehr kritisch interpretiert werden, da die Daten nur sehr eingeschränkt als Randbedingungen verwendet werden können.

Lokale und globale Interpolation:

Bei einer lokalen Interpolationen werden nicht alle Datenwerte für die Interpolation verwendet. Dies bedeutet, dass es Datenwerte y_i gibt, für das Interpolationsgewicht gleich Null ist:

$$\exists i: \lambda_i(x) = 0$$

Bei einer globalen Interpolationen werden immer alle gegebenen Werte berücksichtigt, d.h. dass es keine Interpolationsgewichte gibt, welche Null sind:

$$\forall i: \lambda_i(x) \neq 0$$

Gitterfreie und gitterbasierte Interpolation:

Benötigt ein Interpolationsverfahren eine Vermaschung der Datenpunkte wird es als *gitterbasiert* bezeichnet. Es ist dann zumeist ein lokales Verfahren, welches nur die Datenwerte verwendet, welche sich auf die Zelle beziehen, in der der Interpolationspunkt x liegt.

Gitterfreie (grid-free) Verfahren benötigen keine Vermaschung, sind aber zumeist globale Verfahren.

Deterministische Interpolation:

Die Bestimmung der Gewichte basiert auf einem festgelegten mathematischen Modell. Es ist zumeist nicht initial möglich, die „Unsicherheit“ der Vorhersage abzuschätzen.

(Geo-)statistische Interpolation (z.B. kriging):

Die Bestimmung der Gewichte basiert zusätzlich auf der bekannten oder abgeschätzten räumlichen Korrelation der Daten. Dies ist zumeist aufwändiger als deterministische Vorhersage, erlaubt aber die zusätzliche Abschätzung der „Unsicherheit“ der Vorhersage.

Wahl des Interpolationsverfahrens:

Bei der Wahl des Vorhersageverfahrens sollten folgende Fragen berücksichtigt werden:

1. Entspricht das mathematische Modell des Verfahrens dem vorherzusagenden Parameter bzgl.
 - Skala (diskret/kontinuierlich/...)
 - Glattheit / Differenzierbarkeit ...
 - ... ?
2. Ist Extrapolation für Anwendung notwendig?
3. Ist für die Anwendung exakte Interpolation notwendig oder reicht auch Approximation?
4. Welche Komplexität des Verfahrens ist für die Daten/Anwendung angemessen?
5. ...

1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen
2. Koordinatensysteme und -transformationen
3. Räumliche Datenmodellierung
4. Vermaschungen
5. Räumliche Interpolation
- 6. Transformationen, Filtermethoden**

Filter Methoden

Anstelle eines „wahren“ Rasterbildes liegt typischerweise ein **verraushtes Bild** vor, mit

$$f = f_{\text{true}} + n,$$

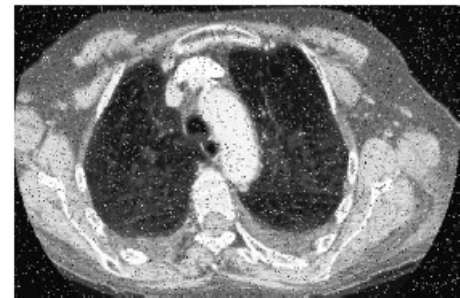
wobei der Fehler n mit verschiedenen Modellen beschrieben werden kann (z.B. Gauß-verteilt, „*gaussian noise*“). **Rauschentfernung / „Denoising“** beschreibt das Problem, eine Schätzung $g \approx f_{\text{true}}$ aus dem Wissen von f zu erhalten.



Original



Original mit „*Gaussian noise*“



Original mit „*Salt and Pepper noise*“

Filter Methoden

Anstelle eines „wahren“ Rasterbildes liegt typischerweise ein **verraushtes Bild** vor, mit

$$f = f_{\text{true}} + n,$$

wobei der Fehler n mit verschiedenen Modellen beschrieben werden kann (z.B. Gauß-verteilt, „*gaussian noise*“). **Rauschentfernung / „Denoising“** beschreibt das Problem, eine Schätzung $g \approx f_{\text{true}}$ aus dem Wissen von f zu erhalten.

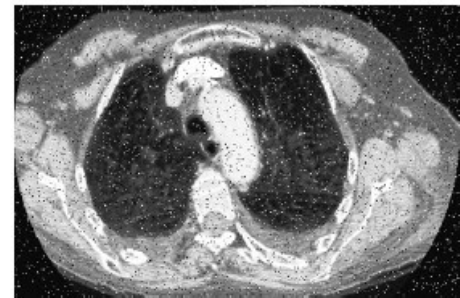
Rauschentfernung ist oft eine initialer Operation für weiter Bildbearbeitungsschritte.



Original



Original mit „*Gaussian noise*“



Original mit „*Salt and Pepper noise*“

Filter Methoden

Konvolution: Gegeben sein ein *Kernel* $w = [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die Konvolution einer Funktion f mit w ist definiert über

$$g(x, y) = (w * f)(x, y) = \int_{[0,1]^2} w(x - u, y - v) f(u, v) du, dv.$$

Fourier-Transformation: Die Fourier-Transformation einer Funktion f ist definiert über

$$F(u, v) = \hat{f}(u, v) = \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(x,y) \cdot (u,v)} f(x, y) dx dy.$$

Konvolution und Fourier-Transformation: Die Fourier-Transformation einer Konvolution hat folgende Eigenschaft:

$$G(u, v) = W(u, v)F(u, v)$$

Filter Methoden

Konvolution: Gegeben sein ein *Kernel* $w = [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die Konvolution einer Funktion f mit w ist definiert über

$$g(x, y) = (w * f)(x, y) = \int_{[0,1]^2} w(x - u, y - v) f(u, v) du, dv.$$

Fourier-Transformation: Die Fourier-Transformation einer Funktion f ist definiert über

$$F(u, v) = \hat{f}(u, v) = \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(x,y) \cdot (u,v)} f(x, y) dx dy.$$

Konvolution und Fourier-Transformation: Die Fourier-Transformation einer Konvolution hat folgende Eigenschaft:

$$G(u, v) = W(u, v)F(u, v)$$

Die Wahl der Kernelfunktion w oder W , entweder im Orts- oder Spektralbereich, bestimmt die Eigenschaften der Konvolution (Filter).

Diskrete Repräsentation / Pixel-Setup:

Konvolution: Gegeben sein ein Kernel $w \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2L+1)}$, die diskrete Konvolution von f mit w ist definiert über

$$g(m, n) = (w * f)(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) f(m - k, n - l)$$

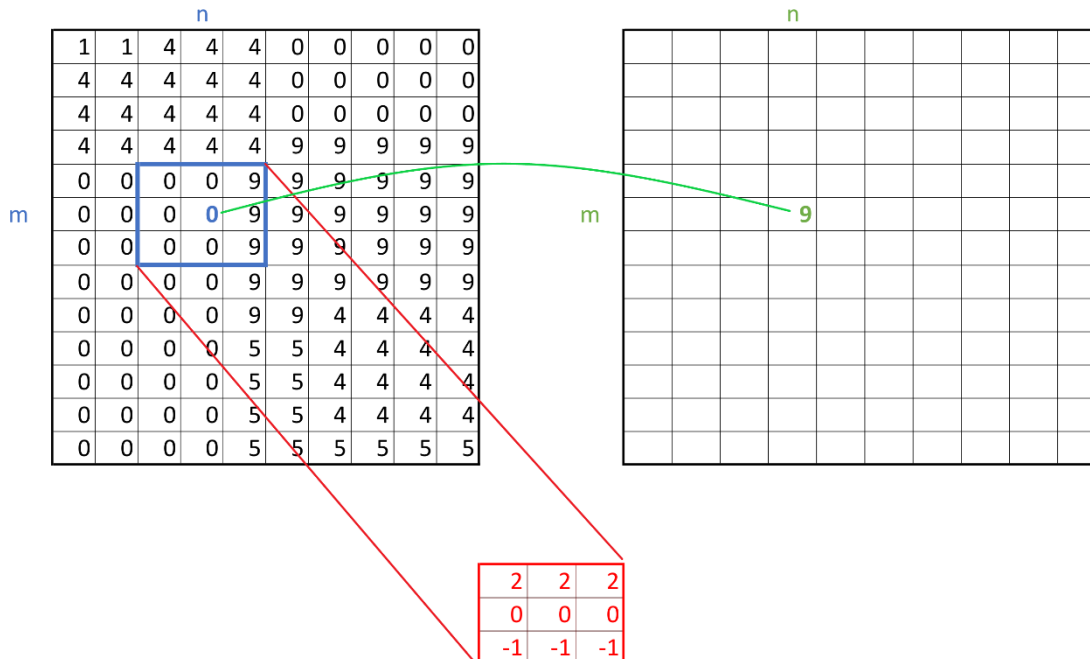
1	1	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	5	5	5	5

Filter Methoden

Diskrete Repräsentation / Pixel-Setup:

Konvolution: Gegeben sein ein Kernel $w \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2L+1)}$, die diskrete Konvolution von f mit w ist definiert über

$$g(m, n) = (w * f)(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) f(m - k, n - l)$$



Beispiele für diskrete Kernelfunktionen w :

Mittelwertkernel / Averaging Kernel in einer $(2K + 1) \times (2L + 1)$ -Nachbarschaft.

Für $L = K = 1$:

$$w = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Kernel mit Gewichtsfunktion $w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}$. Für $L = K = 2$ und $\sigma = 1$:

$$w = \frac{1}{271} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gaußfilter ist ein Spezialfall eines Diffusionsfilters.

0	0.2	0
0.2	0.2	0.2
0	0.2	0

5	3	6	1	5
4	4	7	4	5
6	5	2	1	2
7	6	1	0	2
8	6	2	1	3

[Animation siehe OPAL!](https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975) (https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975)

Filter Methoden

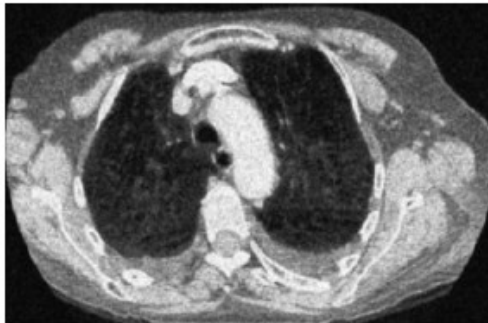
Original



Gauß-verteiltes rauschen



Ergebnis Gaußfilter



Ergebnis Mittelwertfilter



Beispiele für nicht-lineare Filter (basieren nicht auf Konvolution):

Median Filter: Für jeden Pixel (m, n) wird eine lokale Umgebung $LA(m, n) = \{m - K, \dots, m + K\} \times \{n - L, \dots, n + L\}$ definiert und es wird der Median aller Werte in der Umgebung zugeordnet:

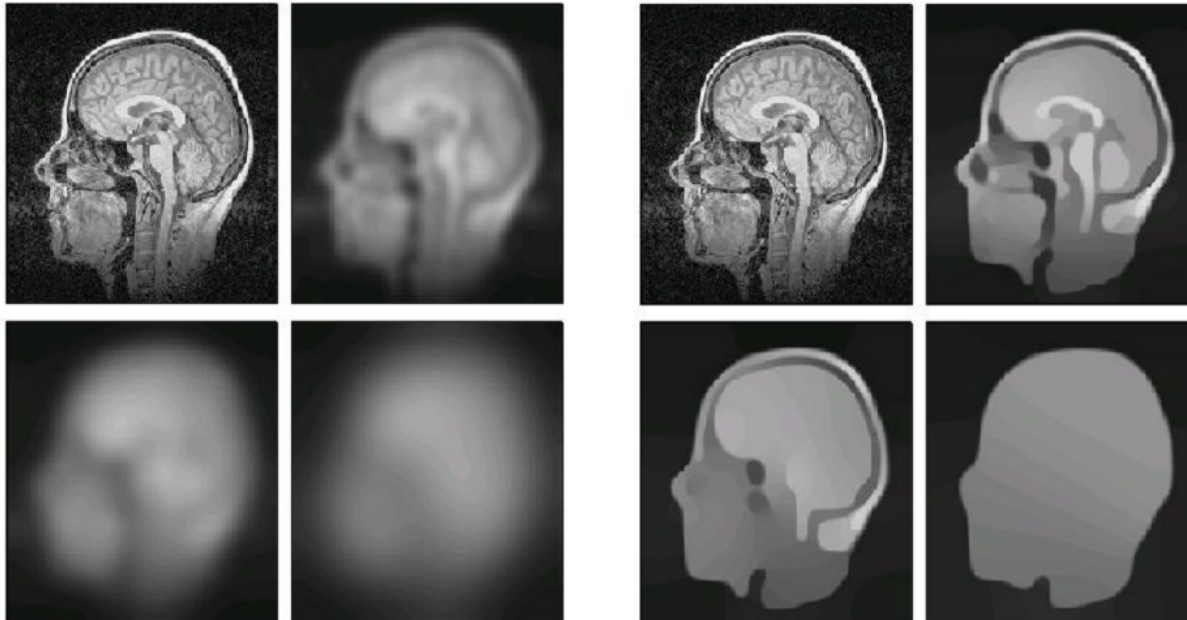
$$g(m, n) = \text{median}\{f(k, l) : (k, l) \in LA(m, n)\}.$$

Nicht-lineare Diffusion: Sei D der Diffusions-Koeffizient, der von g oder ∇g (letztere Ausdruck ist mit Kanten assoziiert) abhängen kann. Dann ist die Diffusionsgleich gegeben mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t, x, y) &= \nabla \cdot (D(g, \nabla g)) \nabla g(t, x, y) \\ g(0, x, y) &= f(x, y). \end{aligned}$$

Oft wird $D = D(|\nabla g|) = e^{-\frac{|\nabla g|^2}{2\sigma^2}}$ gewählt (Perona-Malik Diffusion).

Filter Methoden



Scale space behaviour of **linear** Diffusion filtering

Scale space behaviour of **Nonlinear** Diffusion filtering

'Anisotropic Diffusion in Image Processing', J. Weickert, Teubner, 1998

Für welche Anwendung könnte man nicht-lineare Diffusionsfilterung noch verwenden?

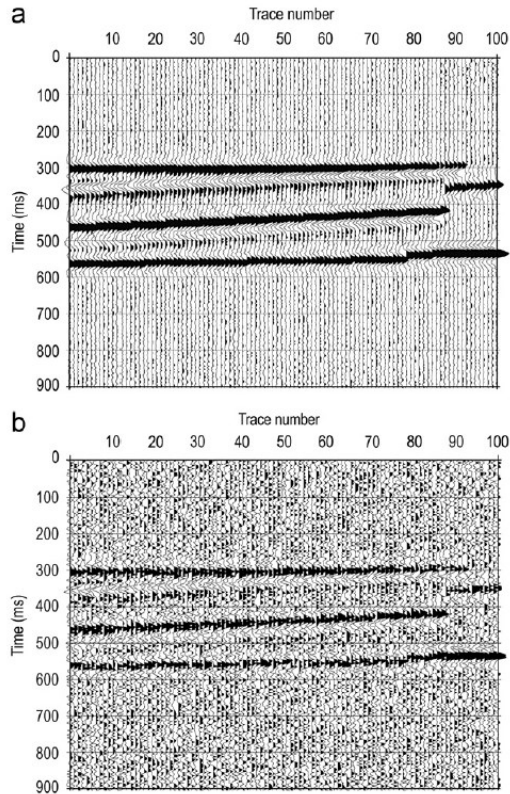


Fig. 3. Synthetic section contaminated with 10% (a) and 50% (b) random noise.

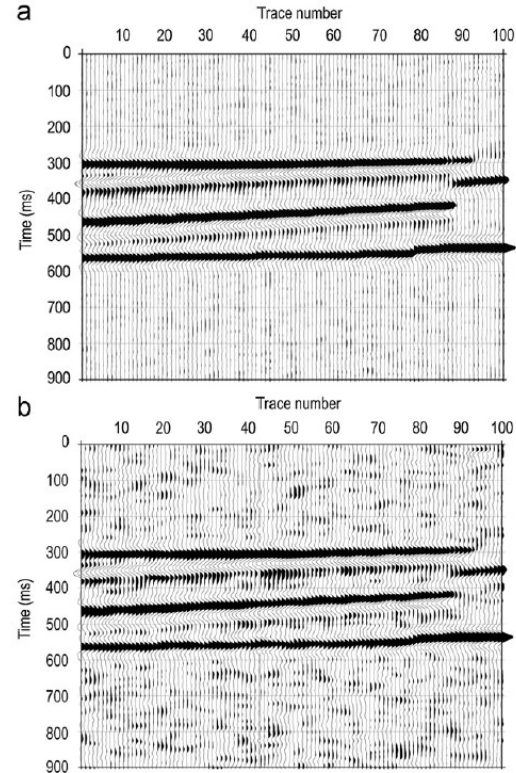
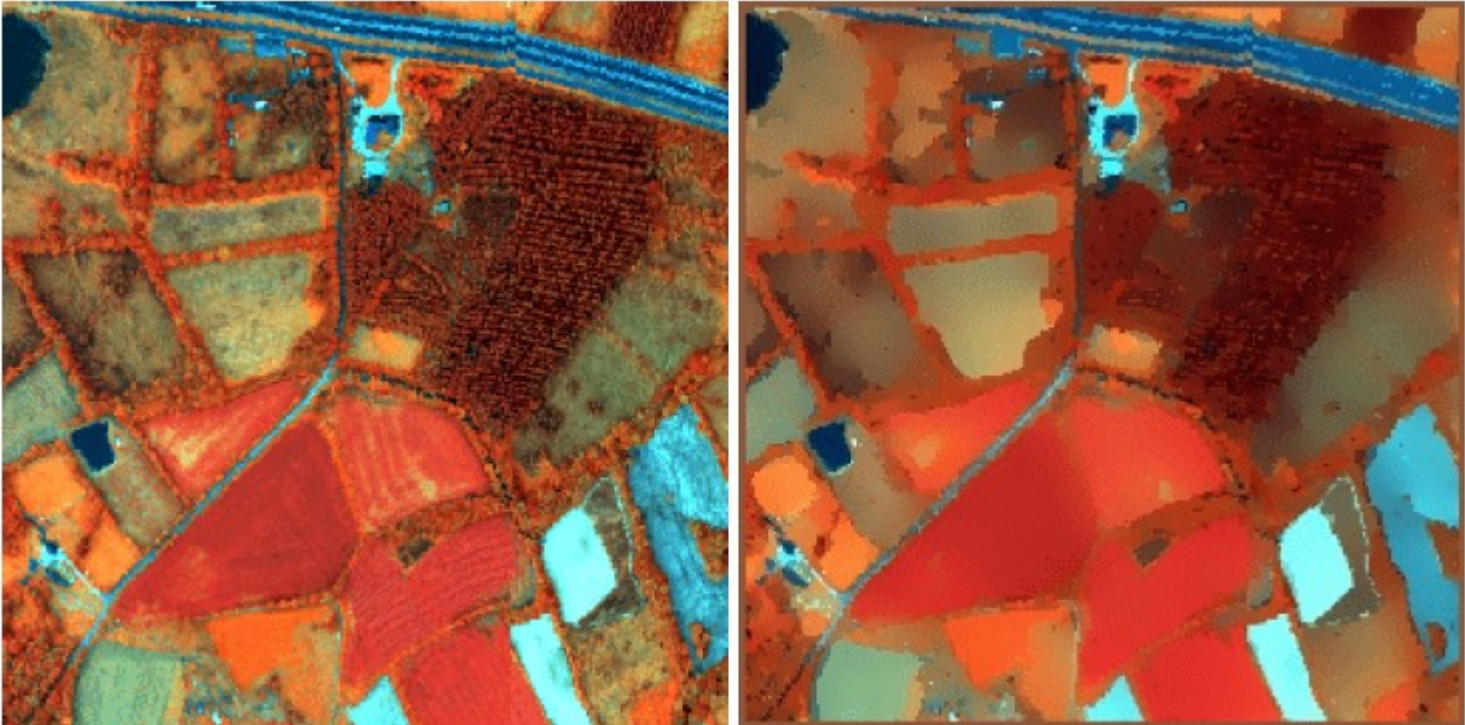


Fig. 4. Anisotropic non-linear diffusion filtering results: (a) section contaminated with 10% random noise and (b) section contaminated with 50% noise.

‘Seismic noise attenuation by means of an anisotropic non-linear diffusion filter’, Baddari et al., Computers & Geoscience, 2011

Für welche Anwendung könnte man nicht-lineare Diffusionsfilterung noch verwenden?



'Nonlinear filtering of hyperspectral images with anisotropic diffusion', Lennon et al., IEEE Int. Geosc. Remote Sensing Symp., 2002