

Der Duale Graph

Der **duale Graph** $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$ zum Graph \mathcal{G} ordnet die Vertices V^* den Flächen F aus \mathcal{G} zu. Die Kantenmenge E^* beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus V^* wenn die zugehörigen Flächen aus \mathcal{G} zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazent-Matrizen A_{V^*} und A_F identisch.

Der Duale Graph

Der **duale Graph** $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$ zum Graph \mathcal{G} ordnet die Vertices V^* den Flächen F aus \mathcal{G} zu. Die Kantenmenge E^* beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus V^* wenn die zugehörigen Flächen aus \mathcal{G} zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazent-Matrizen A_{V^*} und A_F identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer n -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre i -Zellen den $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet: $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

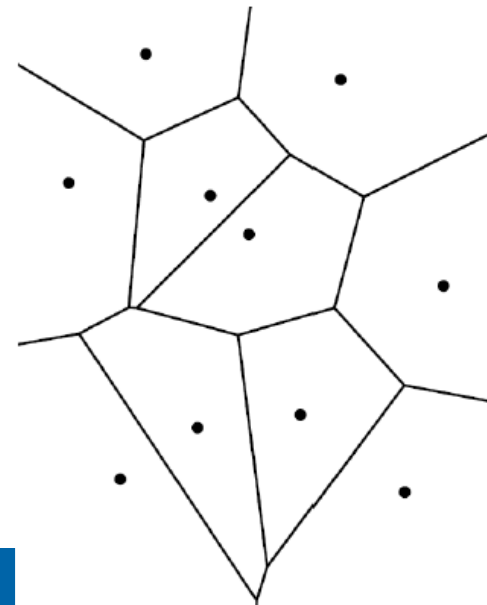
Der Duale Graph

Der **duale Graph** $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$ zum Graph \mathcal{G} ordnet die Vertices V^* den Flächen F aus \mathcal{G} zu. Die Kantenmenge E^* beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus V^* wenn die zugehörigen Flächen aus \mathcal{G} zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen A_{V^*} und A_F identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer n -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre i -Zellen den $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet: $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.



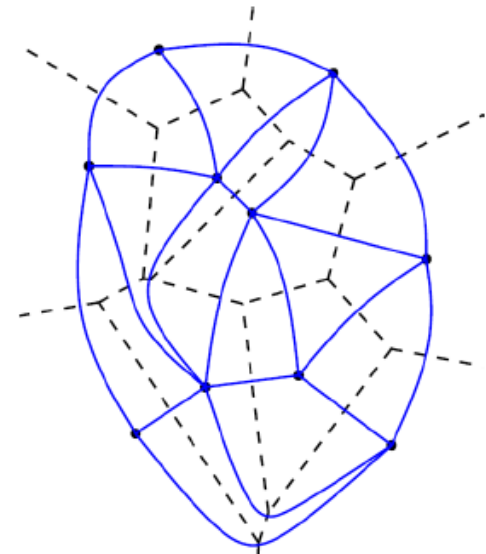
Der Duale Graph

Der **duale Graph** $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$ zum Graph \mathcal{G} ordnet die Vertices V^* den Flächen F aus \mathcal{G} zu. Die Kantenmenge E^* beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus V^* wenn die zugehörigen Flächen aus \mathcal{G} zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen A_{V^*} und A_F identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer n -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre i -Zellen den $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet: $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.



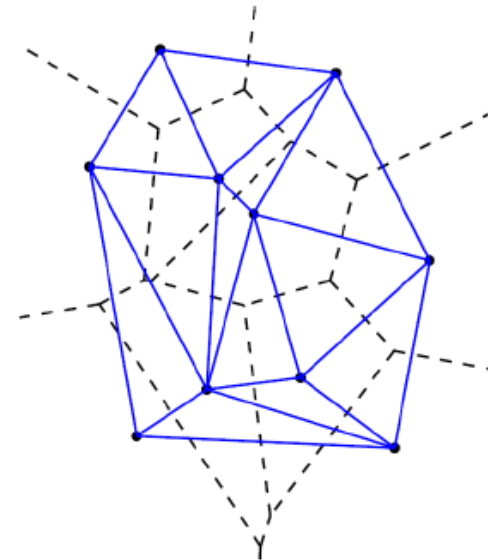
Der Duale Graph

Der **duale Graph** $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$ zum Graph \mathcal{G} ordnet die Vertices V^* den Flächen F aus \mathcal{G} zu. Die Kantenmenge E^* beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus V^* wenn die zugehörigen Flächen aus \mathcal{G} zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen A_{V^*} und A_F identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer n -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre i -Zellen den $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet: $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.



Triangulation

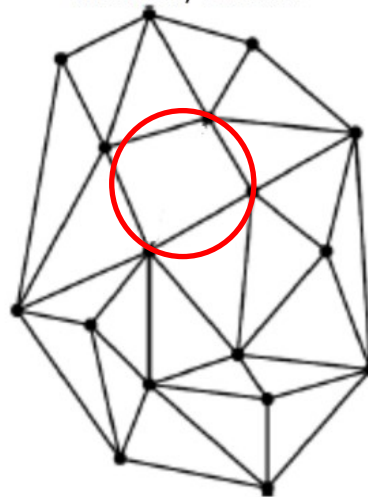
Definition (Triangulation). Eine Triangulation \mathcal{T} einer Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *maximale* „Familie“ von Dreiecken in der Form:

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) : \text{die Kanten } \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \text{ schneiden sich mit keiner Kante } \overline{p_{k_1}p_{k_2}}, \overline{p_{k_2}p_{k_3}}, \overline{p_{k_1}p_{k_3}} \text{ eines anderen Dreiecks } T_k; k \neq i; i, k = 1, \dots, M_{\mathcal{T}}\}$$

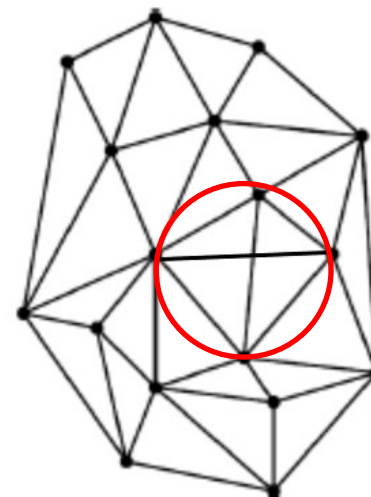
„*Maximal*“ bedeutet in diesem Kontext, dass kein weiteres Dreieck hinzugefügt werden kann, ohne dass sich Dreieckskanten schneiden.



No triangulation: Violates maximality condition



No triangulation: Violates no intersection condition



Triangulation

Definition (Triangulation). Eine Triangulation \mathcal{T} einer Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *maximale* „Familie“ von Dreiecken in der Form:

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) : \text{die Kanten } \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \text{ schneiden sich mit keiner Kante } \overline{p_{k_1}p_{k_2}}, \overline{p_{k_2}p_{k_3}}, \overline{p_{k_1}p_{k_3}} \text{ eines anderen Dreiecks } T_k, ; k \neq i; i, k = 1, \dots, M_{\mathcal{T}}\}$$

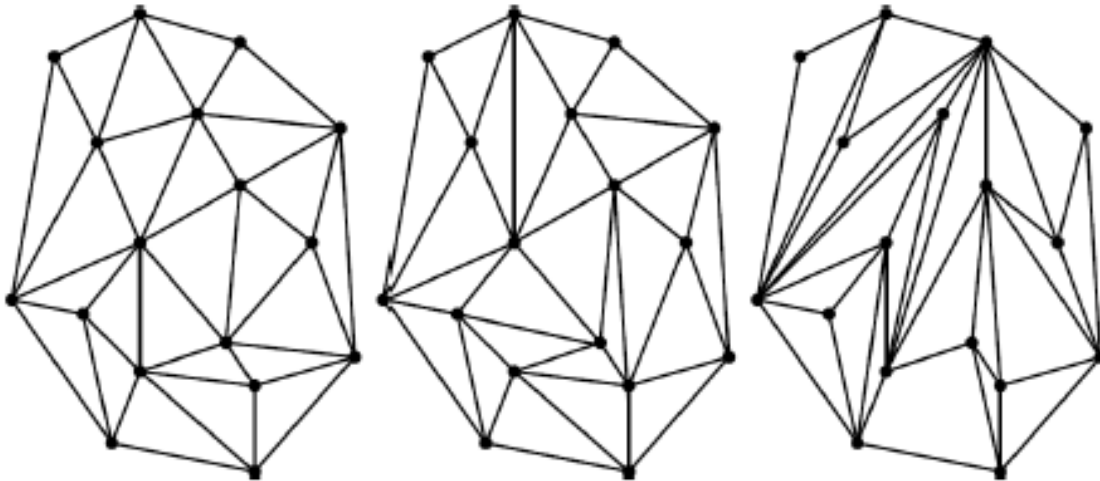
„*Maximal*“ bedeutet in diesem Kontext, dass kein weiteres Dreieck hinzugefügt werden kann, ohne dass sich Dreiecksseiten schneiden.

Allgemeine Eigenschaften von \mathcal{T} (Notation gemäß Online-Skript):

- Jedes $T \in \mathcal{T}$ mit $T = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_k)$ ist **nicht-degeneriert**: $p_i \neq p_j \neq p_k$ und $\text{area}(T) > 0$
- Ein Dreieck $T = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_k)$ enthält **keinen anderen** Punkt $p_l \in P$ mit $l \neq i, j, k$
- \mathcal{T} überdeckt die **komplette konvexe Hülle** von P : $\cup \mathcal{T} = [P]$
- Dreiecke überlappen sich, wenn überhaupt, nur an ihren Grenzen: $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Triangulation

Die Triangulation einer gegebenen Punktmenge ist **NIEMALS** eindeutig. Es gibt immer mehrere Lösungen, um die gegebenen Punkt mit Dreiecken zu verbinden, welche die genannten Eigenschaften aufweisen.



Triangulation

Die Triangulation einer gegebenen Punktmenge ist **NIEMALS** eindeutig. Es gibt immer mehrere Lösungen, um die gegebenen Punkte mit Dreiecken zu verbinden, welche die genannten Eigenschaften aufweisen.

Es lassen sich aber zumindest einige generelle Aussagen über die Triangulierung einer gegebenen Punktmenge treffen:

Gegeben sei die Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ (in genereller Position). $\mathcal{T}(P)$ enthält immer

$$M_T = 2N - K - 2$$

Dreiecke und

$$M_K = 3N - K - 3$$

Kanten. K ist dabei die Anzahl der Punkte auf der konvexen Hülle von P .

Beweis: Euler-Poincaré-Theorem

⇒ **Die Anzahl der Dreiecke und Dreieckskanten ist konstant für alle möglichen $\mathcal{T}(P)$.**

Delaunay Triangulation

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ der duale Graph bezüglich einer Voronoi Vermaschung \mathcal{V} .

Definition (Delaunay Triangulation). Eine Triangulation \mathcal{T} wird als Delaunay Triangulation bezeichnet wenn

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) : \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \in \mathcal{D}(\mathcal{V}), i = 1, \dots, M_T\}$$

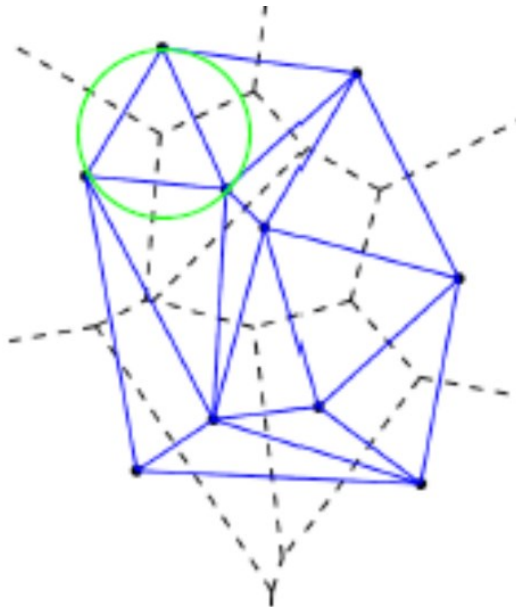
Delaunay Triangulation

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ der duale Graph bezüglich einer Voronoi Vermaschung \mathcal{V} .

Definition (Delaunay Triangulation). Eine Triangulation \mathcal{T} wird als Delaunay Triangulation bezeichnet wenn

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) : \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \in \mathcal{D}(\mathcal{V}), i = 1, \dots, M_T\}$$

Lemma. Eine Triangulation \mathcal{T} einer Punktmenge $P \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine **Delaunay Triangulation**, wenn der Umkreis jedes Dreiecks $T \in \mathcal{T}$ keinen Punkt $p \in P$ in seinem Inneren enthält.



Konstruktive Delaunay Triangulation

Definition (Winkel-maximale Triangulation) Sei \mathcal{T} eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ und sei $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3M_{\mathcal{T}}})$ die aufsteigend sortierte Sequenz der Dreieckswinkel. Des weiteren sei $A(\mathcal{T}') = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3M_{\mathcal{T}'})$ die aufsteigend sortierte Sequenz der Dreieckswinkel einer zweiten Triangulation \mathcal{T}' von P . Dann kann man sagen

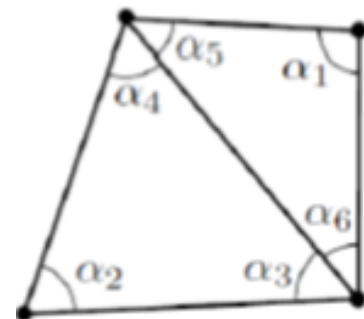
$$A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}'),$$

falls ein Index I existiert, für den gilt

$$\alpha_i = \alpha'_i \text{ für } i < I \text{ und } \alpha_I > \alpha'_I.$$

Die Triangulation \mathcal{T} wird als „Winkel-maximal“ bezeichnet, wenn für jede mögliche Triangulation $\mathcal{T}'(P)$ gilt:

$$A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$$



Konstruktive Delaunay Triangulation

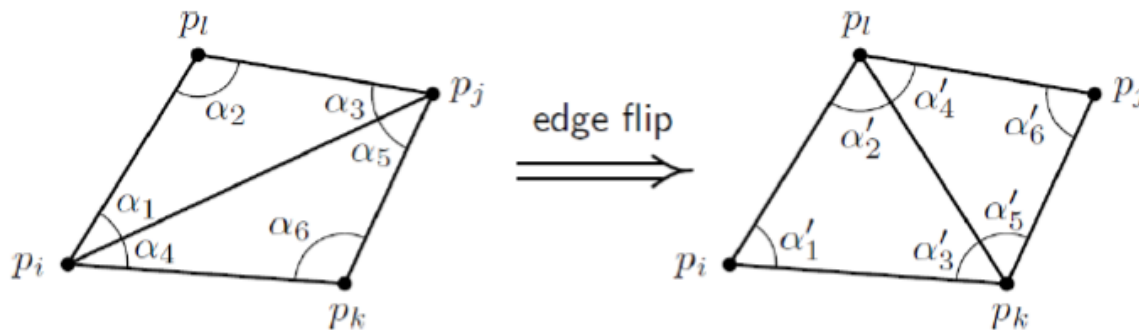
Definition („illegale“ Kante, Kanten-flip) Sei \mathcal{T} eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ und seien $T_1 = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_k)$, $T_2 = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_l)$ zwei benachbarte Dreiecke dieser Triangulation, deren Vereinigung ein konvexes Viereck bilden.

Jetzt lässt sich ein weiteres Paar benachbarter Dreiecke $T'_1 = \mathcal{C}(p_i, p_l, p_k)$, $T'_2 = \mathcal{C}(p_j, p_k, p_l)$ definieren.

Wen für die beteiligten Winkel gilt:

$$\min_{i=1,\dots,6} \alpha_i < \min_{i=1,\dots,6} \alpha'_i$$

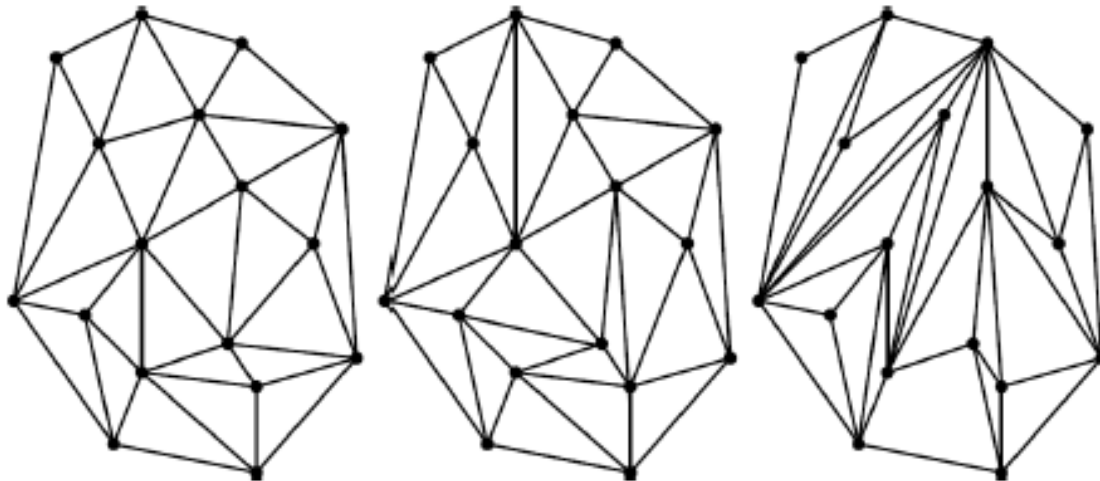
dann wird die Kante $\overline{p_i p_j}$ als „illegale“ Kante bezeichnet. Die Überführung von T_1, T_2 nach T'_1, T'_2 wird als „Kanten-flip“ (*edge flip*) bezeichnet.



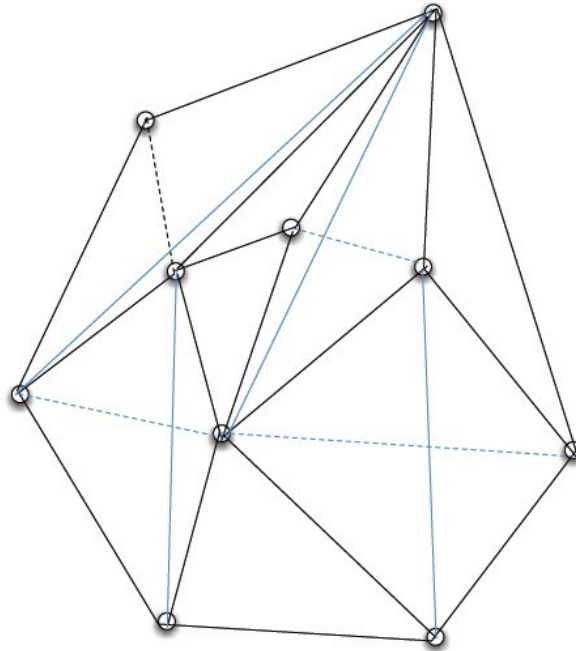
Konstruktive Delaunay Triangulation

Wenn eine Triangulation \mathcal{T} eine „illegale“ Kante beinhaltet, führt ein Kanten-Flip zu einer neuen Triangulation \mathcal{T}' mit $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$. Wenn dies iterativ durchgeführt wird, bis keine „illegale“ Kanten mehr vorhanden sind, führt dies zu einer **Delaunay Triangulation**.

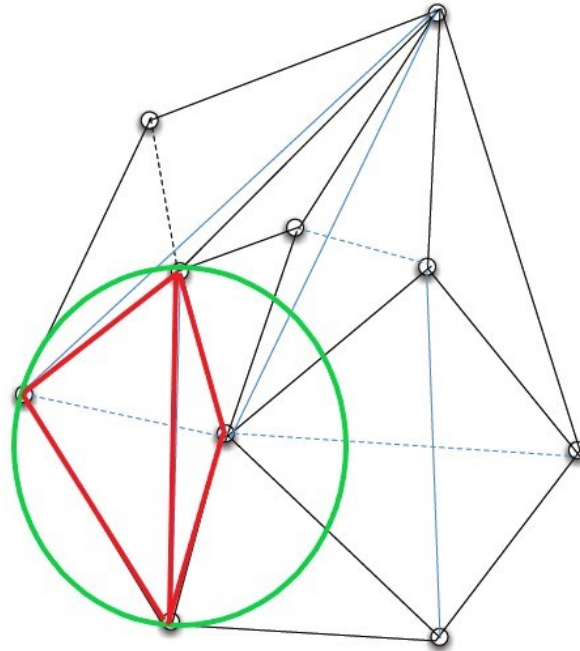
Theorem (Charakterisierung einer Delaunay Triangulation) Sei \mathcal{T} eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$. \mathcal{T} ist genau dann eine Delaunay Triangulation (im Sinne der Definition über die duale Vermaschung zu einer Voronoi Vermaschung), wenn sie keine „illegalen“ Kanten enthält.



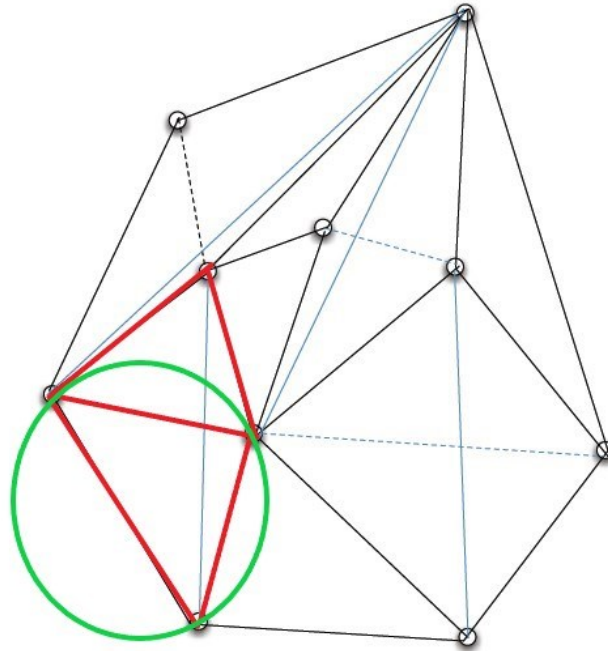
Konstruktive Delaunay Triangulation



Konstruktive Delaunay Triangulation



Konstruktive Delaunay Triangulation



Constrained Delaunay Triangulation

In bestimmten Situationen liegen bereits vor der Triangulierung wichtige Zusatzinformationen bezüglich der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Knoten vor.

Z.b.

- Bekannte Höhenlinien (Isolinien der Höhe, Linie mit konstanten Höhenwerten); diese Linienobjekte sollten als Kanten in einer Triangulierung erhalten bleiben.
- Linien, welche Störungen / Diskontinuitäten repräsentieren (diese Linien müssen erhalten bleiben, keine Dreieckskante darf eine solche Linie schneiden)

Constrained Delaunay Triangulation

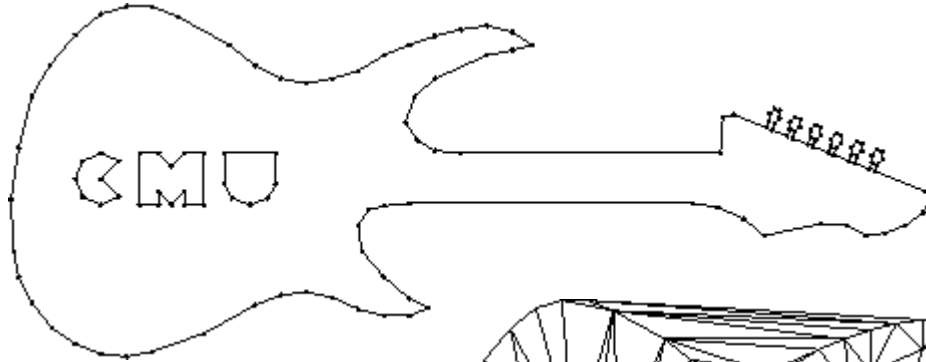
In bestimmten Situationen liegen bereits vor der Triangulierung wichtige Zusatzinformationen bezüglich der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Knoten vor.

Z.b.

- Bekannte Höhenlinien (Isolinien der Höhe, Linie mit konstanten Höhenwerten); diese Linienobjekte sollten als Kanten in einer Triangulierung erhalten bleiben.
- Linien, welche Störungen / Diskontinuitäten repräsentieren (diese Linien müssen erhalten bleiben, keine Dreieckskante darf eine solche Linie schneiden)

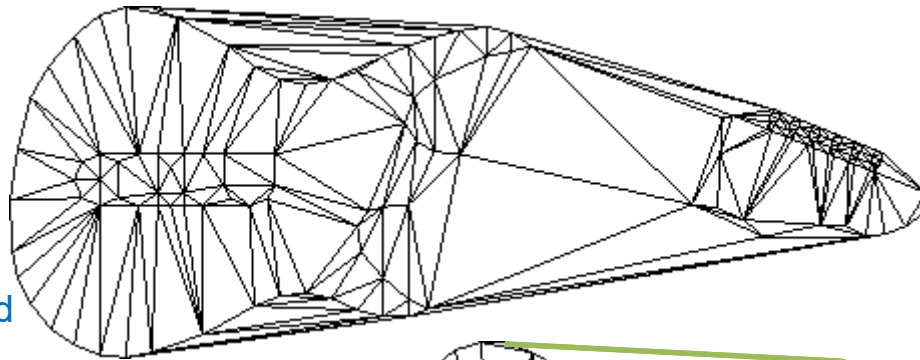
Das **lokale Vorgehen** bei der Konstruktion einer Delaunay Triangulierung erlaubt es, diese Zusatzinformationen bzgl. Kanten direkt zu berücksichtigen. Die entstehende Triangulierung ist immer noch größtenteils „winkel-maximal“, außer für die Dreiecke, welche durch die Zusatzinformationen beeinflusst wurden bzw. eine solche „constrained“ Kante verwenden.

Constrained Delaunay Triangulation

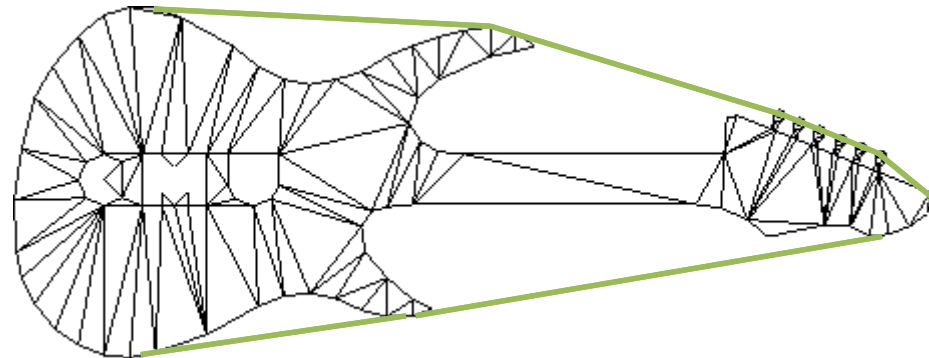


Gegeben seien die Umrisskanten / Knoten einer Gitarre.

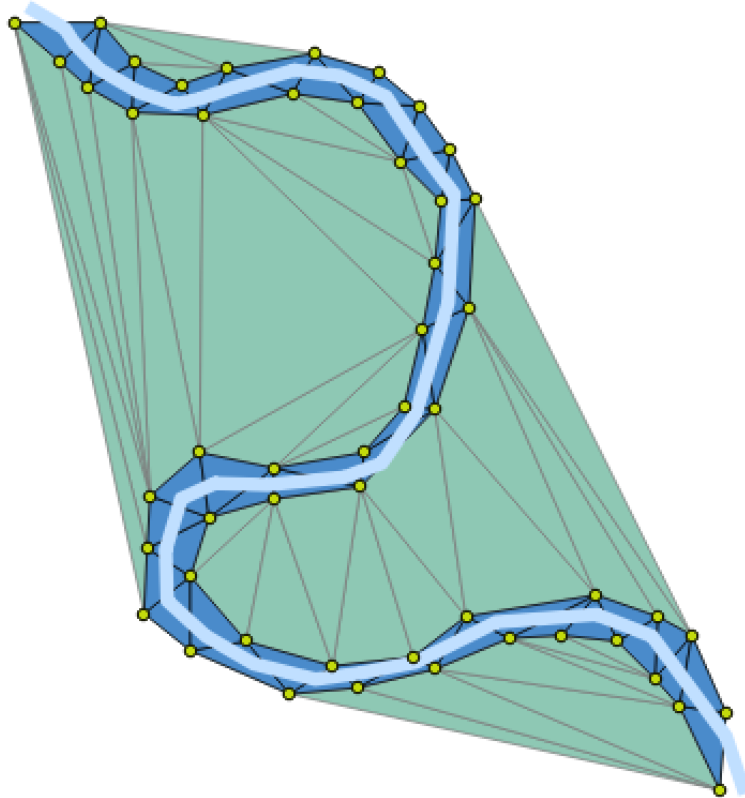
Eine Triangulierung ohne Constraints führt zu folgendem Ergebnis. Einige Details der Gitarre gehen verloren und es wird die komplette konvexe Hülle vermascht.



Werden die Umrisskanten als Constraints verwendet, bleiben alle Details erhalten. Es wird zwar immer noch die komplette konvexe Hülle trianguliert, alle „äußeren“ Dreiecke lassen sich aber nachträglich entfernen.



Constrained Delaunay Triangulation



Triangulierung mittels Constraints welche das Flussbett beschreiben.



Triangulierung einer Insel mit der Küstenlinie als Constraints. Alle äußeren Dreiecke wurden nachträglich entfernt.