TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERGAKADEMIE FREIBERG
Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

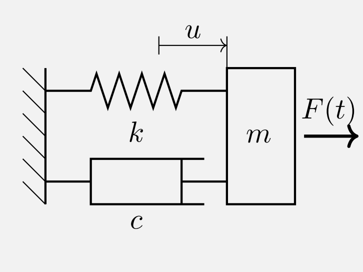
HELMHOLTZ
Zentrum für Umweltforschung

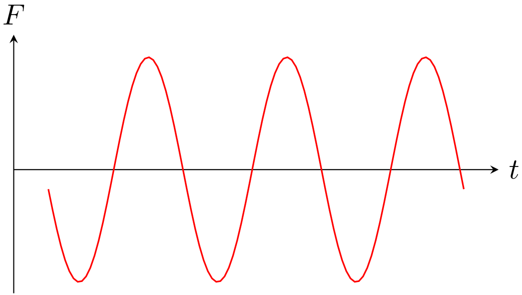
# Vorlesung Bodendynamik

## Sommersemester 2023

### Thema: Frequenzanalyse

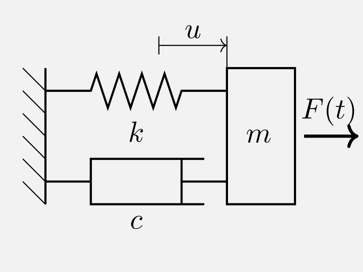
# ZWISCHENBILANZ

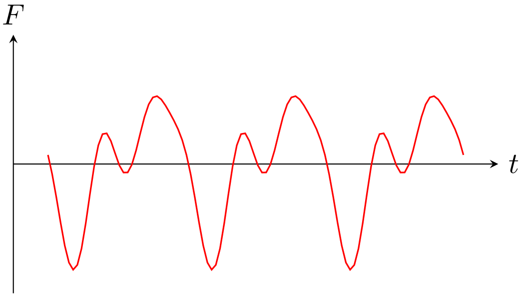



- harmonische Anregung $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$ ✓
- allgemeine periodische Anregung $F(t + T) = F(t)$ ...

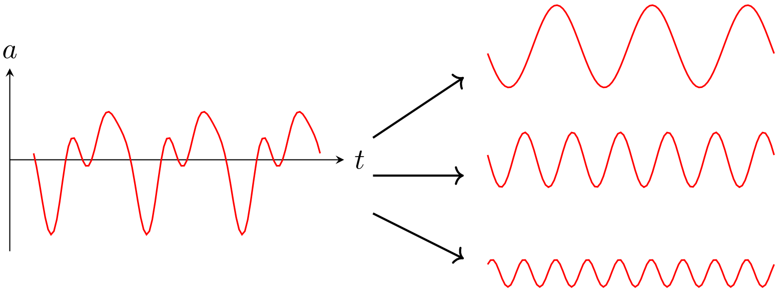
# ZWISCHENBILANZ



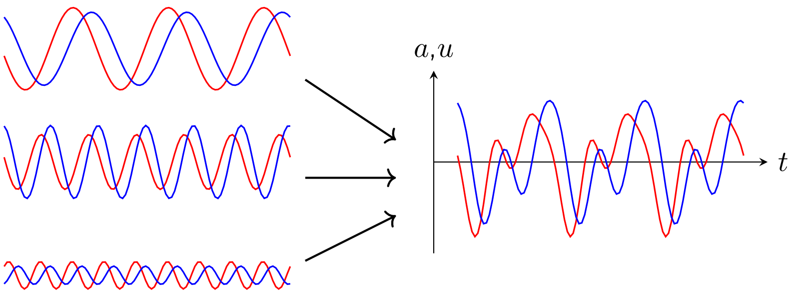

- harmonische Anregung $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$ ✓
- allgemeine periodische Anregung $F(t+T) = F(t)$ ...

# VORGEHENSWEISE (FÜR LINEARE SYSTEME)



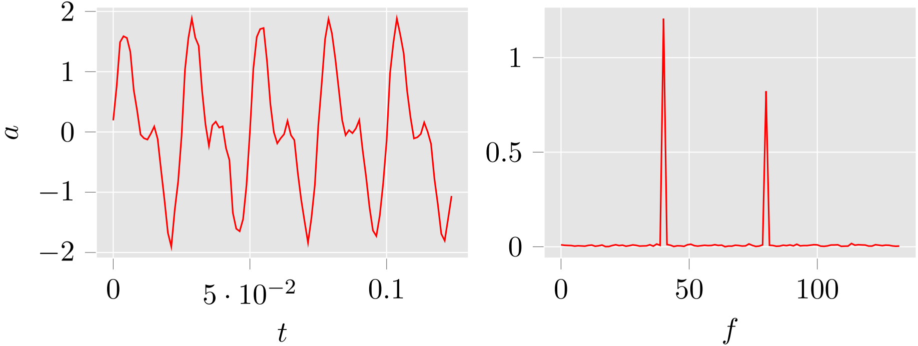

1. Schritt: Eingangssignal (Anregung) in Frequenzkomponenten zerlegen

# VORGEHENSWEISE (FÜR LINEARE SYSTEME)




2. Schritt: Teilprobleme lösen und deren Ausgangssignale (Antwort) addieren

# HARMONISCHE ANALYSE

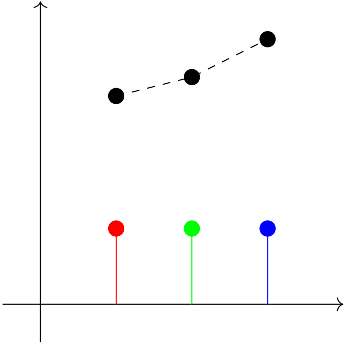



Leicht verrauschter Zeitverlauf und dessen Spektrum (FFT)

Anmerkung: Oft wird vor der FFT eine *Fensterung* angewandt, um Diskretisierungseffekte zu kompensieren (Kompromiss).

# DARSTELLUNGSARTEN – DISKRETE SIGNALE

Die Grundidee demonstrieren wir an einem diskreten Signal $\mathbf{s}$.

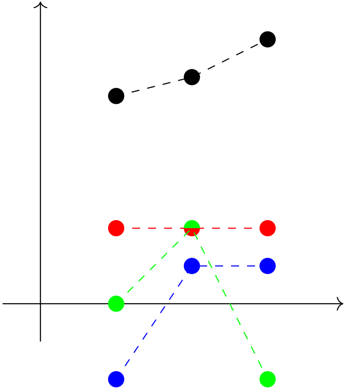


$$\mathbf{s} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# DARSTELLUNGSARTEN – DISKRETE SIGNALE

Die Grundidee demonstrieren wir an einem diskreten Signal $\mathbf{s}$.



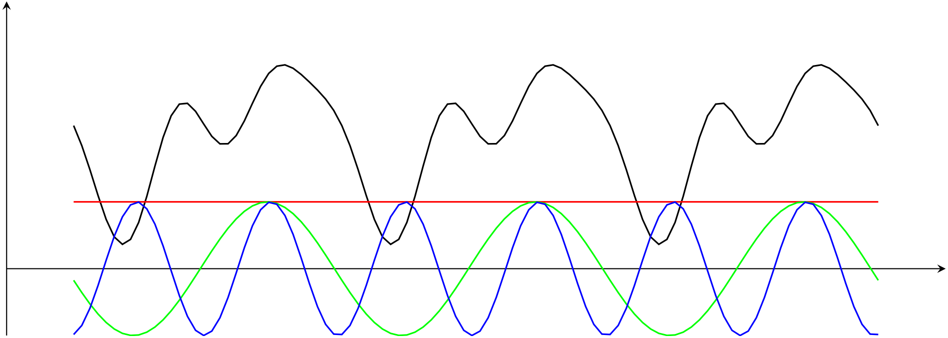
$$\mathbf{s} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

**Hausaufgabe:** Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit beider Darstellungen.

# DARSTELLUNGSARTEN – KONTINUIERLICHE SIGNALE

Im Grenzübergang (unendlich viele Punkte) lassen sich stetige Funktionen punktweise oder als Summe (unendlich vieler) Basisfunktionen darstellen.



Im Fall der Fourierreihe stellen trigonometrische Funktionen die Basis dar.

# EXKURS – ORTHOGONALITÄT

Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen lautet

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Die Funktionen der Fourierreihe sind orthogonal zueinander

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \, \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

# FOURIERREIHE 1/2

Aus den bisherigen Überlegungen wissen wir, dass sich periodische Funktionen $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$ folgendermaßen darstellen lassen

$$g(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta.$$

Um die Koeffizienten $A_k$ und $B_k$ zu finden, nutzen wir die Orthogonalität der Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta \right) \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= A_n \pi, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta &= \ \ldots \ = B_n \pi. \end{aligned}$$

# FOURIERREIHE 2/2

Für Funktionen mit allgemeiner Periode $f(t) = f(t+T)$ erhalten wir durch die Varitblentransformation $\theta = 2\pi t/T$ die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi k}{T}}_{\omega_k} t\right) + B_k \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi k}{T}}_{\omega_k} t\right)$$

mit den Koeffizienten

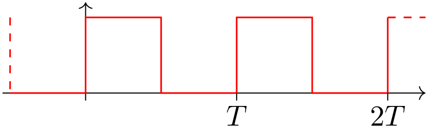
$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t,$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin(\omega_k t)\,\mathrm{d}t.$$

**Hausaufgabe:** Leiten Sie diese Ausdrücke her.

# BEISPIEL 1/2

Rechtecksignal $a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \frac{1}{2}T \\ 0, & \frac{1}{2}T < t \leq T \\ 1, & T < t \leq \frac{3}{2}T \\ \vdots & \vdots \end{cases}$




$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left|t\right|_0^{T/2} = 1,$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left|\frac{T}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right|_0^{T/2} = 0,\ \ k > 0,$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left|\frac{-T}{2\pi k}\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right|_0^{T/2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k}, & k = 1, 3, \ldots, \\ 0, & k = 2, 4, \ldots. \end{cases}$$

# BEISPIEL 2/2

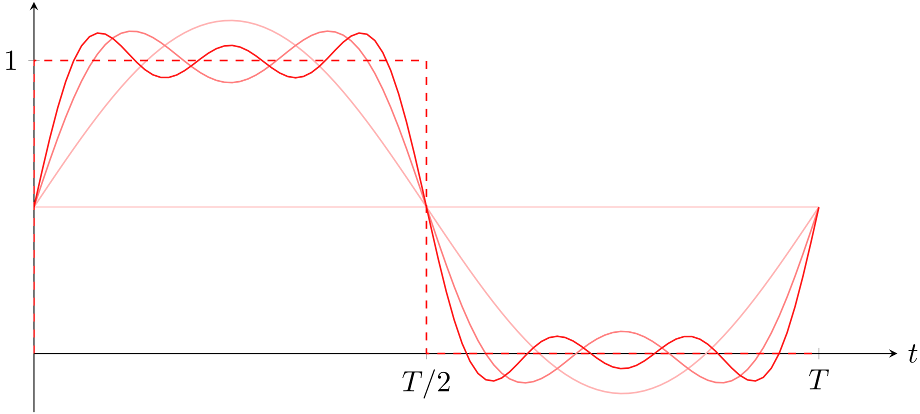



Abb. 1: Approximation des Rechteckimpulses als Fourierreihe ($k = 1, 2, 3, 5$)

# ANSCHAULICHE DARSTELLUNG

*SmarterEveryDay: Was ist eine Fourierreihe?*

# SUPERPOSITIONSPRINZIP

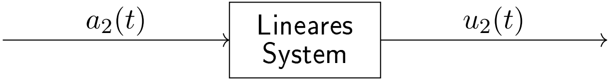
$$a_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{Lineares System}} \longrightarrow u_1(t)$$

Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \\
&\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \left(\frac{2\pi kt}{T}\right)
\end{aligned}
$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^{K} u_k(t)$$

# SUPERPOSITIONSPRINZIP



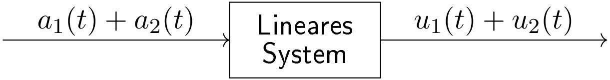

Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$a(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^{K} u_k(t)$$

# SUPERPOSITIONSPRINZIP



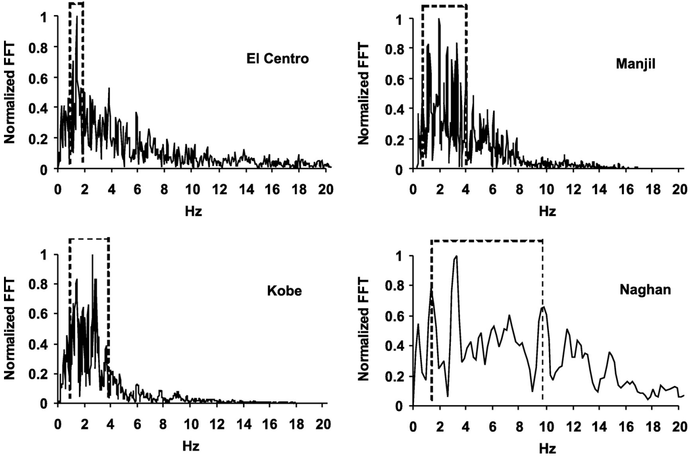

Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$a(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^{K} u_k(t)$$

# ANWENDUNGSBEISPIEL




Amplitudenspektrum ausgewählter Erdbeben [VGG08]

# ZUSATZMATERIAL

*3Blue1Brown: Was ist eine Fourier-Transformation?*

# AUSBLICK

- Allgemeine Anregung (nichtperiodisch): Faltungsintegral [SKL08]
- Numerische Lösung: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen [SKL08; HNW08]

# Literaturverzeichnis


[HNW08] E. Hairer, S.P. Nørsett und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540566700. URL: https://books.google.de/books?id=F93u7VcSRyYC.

[SKL08] Jost A. Studer, Martin G. Koller und Jan Laue. *Bodendynamik*. 3. Aufl. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-29624-9.

[VGG08] J. Vaseghi Amiri, G. Ghodrati Amiri und B. Ganjavi. „Seismic vulnerability assessment of multi-degree-of-freedom systems based on total input energy and momentary input energy responses“. In: *Canadian Journal of Civil Engineering* 35.1 (2008), S. 41–56. DOI: 10.1139/L07-085. eprint: https://doi.org/10.1139/L07-085. URL: https://doi.org/10.1139/L07-085.