



**TUBAF**

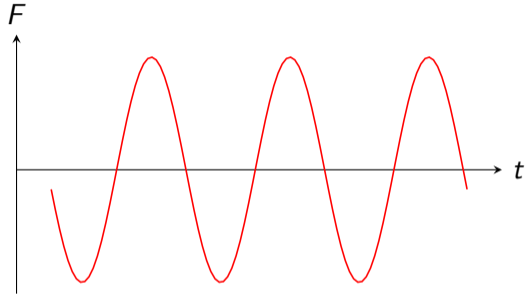
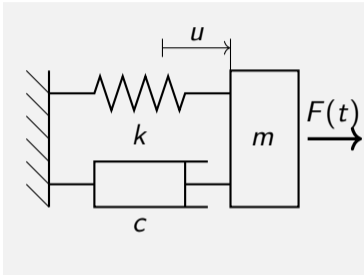
The University of Resources.  
Since 1765.

# Bodendynamik

Dominik Kern

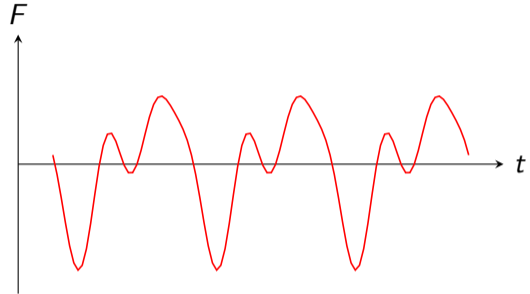
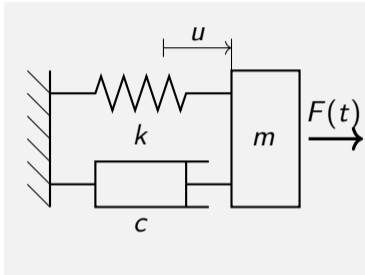
April 23, 2024

# Zwischenbilanz



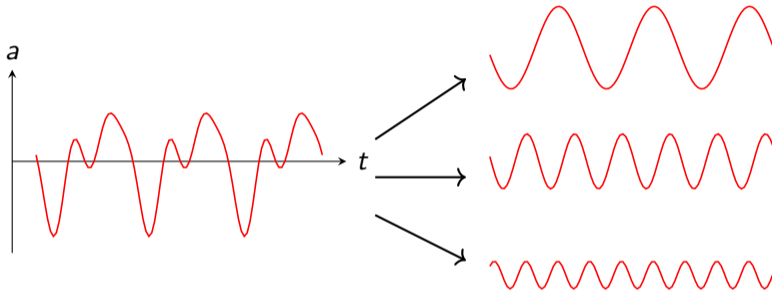
- harmonische Anregung  $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$  ✓
- allgemeine periodische Anregung  $F(t + T) = F(t) \dots$

# Zwischenbilanz



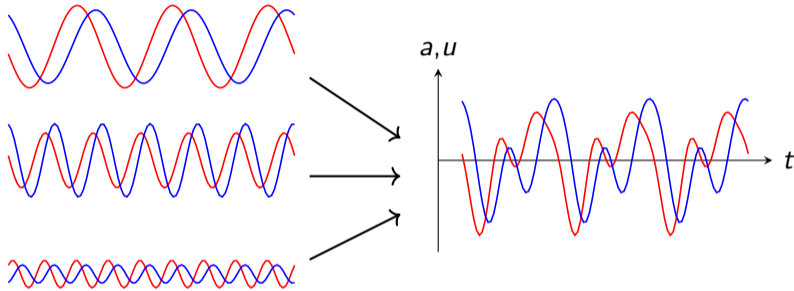
- harmonische Anregung  $F(t) = F_C \cos \omega t + F_S \sin \omega t$  ✓
- allgemeine periodische Anregung  $F(t + T) = F(t) \dots$

# Vorgehensweise (für lineare Systeme)



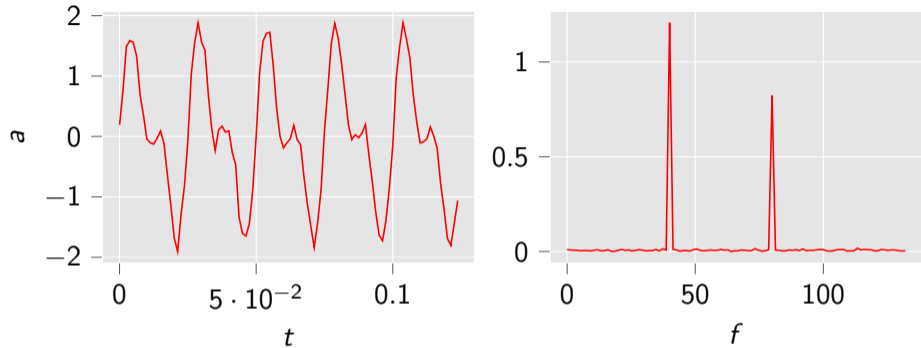
1. Schritt: Eingangssignal (Anregung) in Frequenzkomponenten zerlegen

# Vorgehensweise (für lineare Systeme)



2. Schritt: Teilprobleme lösen und deren Ausgangssignale (Antwort) addieren

# Harmonische Analyse

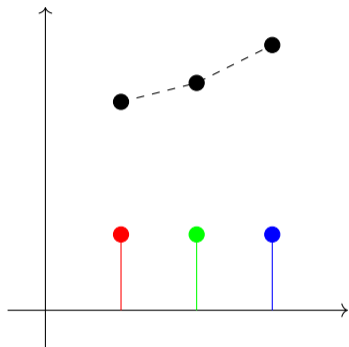


Leicht verrauschter Zeitverlauf und dessen Spektrum (FFT)

Anmerkung: Oft wird vor der FFT eine *Fensterung* angewandt, um Diskretisierungseffekte zu kompensieren (Kompromiss).

# Darstellungsarten – diskrete Signale

Die Grundidee demonstrieren wir an einem diskreten Signal  $s$ .

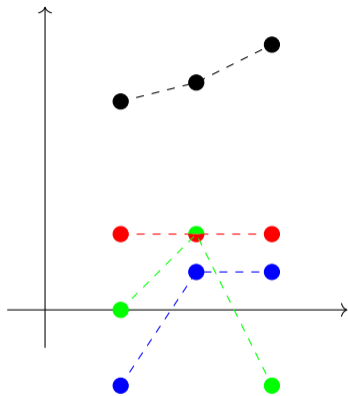


$$s = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Darstellungsarten – diskrete Signale

Die Grundidee demonstrieren wir an einem diskreten Signal  $s$ .



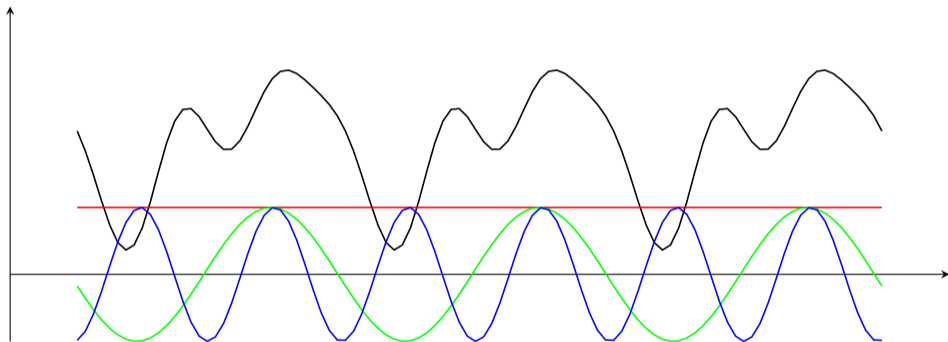
$$s = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

**Hausaufgabe:** Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit beider Darstellungen.

## Darstellungsarten – kontinuierliche Signale

Im Grenzübergang (unendlich viele Punkte) lassen sich stetige Funktionen punktweise oder als Summe (unendlich vieler) Basisfunktionen darstellen.



Im Fall der Fourierreihe stellen trigonometrische Funktionen die Basis dar.

## Exkurs – Orthogonalität

Zwei Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet

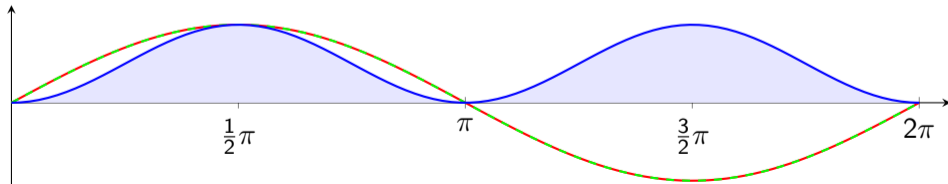
$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad \text{mit } v_1 \cdot v_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad v_2 \cdot v_2 \neq 0.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen lautet

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0, \quad \text{mit } \int_a^b f_1(x) f_1(x) dx \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x) f_2(x) dx \neq 0.$$

Die Funktionen der Fourierreihe sind orthogonal zueinander

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin x dx = \pi.$$



## Exkurs – Orthogonalität

Zwei Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet

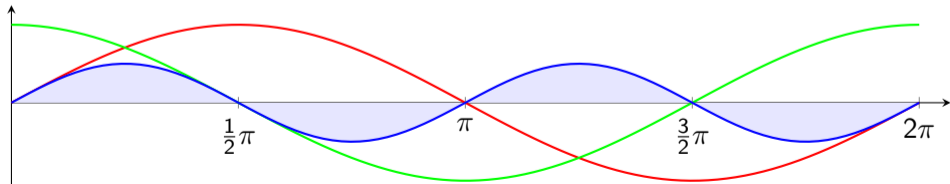
$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad \text{mit } v_1 \cdot v_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad v_2 \cdot v_2 \neq 0.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen lautet

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0, \quad \text{mit } \int_a^b f_1(x) f_1(x) dx \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x) f_2(x) dx \neq 0.$$

Die Funktionen der Fourierreihe sind orthogonal zueinander

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$



## Exkurs – Orthogonalität

Zwei Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet

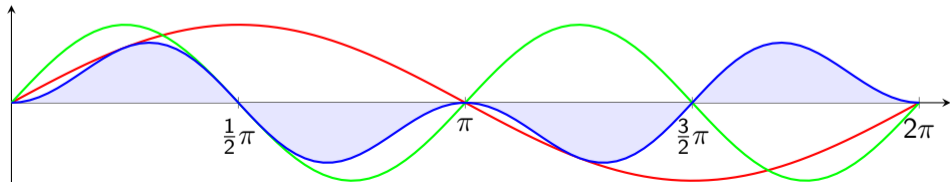
$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad \text{mit } v_1 \cdot v_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad v_2 \cdot v_2 \neq 0.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen lautet

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0, \quad \text{mit } \int_a^b f_1(x) f_1(x) dx \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x) f_2(x) dx \neq 0.$$

Die Funktionen der Fourierreihe sind orthogonal zueinander

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x dx = 0.$$



## Exkurs – Orthogonalität

Zwei Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad \text{mit} \quad v_1 \cdot v_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad v_2 \cdot v_2 \neq 0.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen lautet

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0, \quad \text{mit} \quad \int_a^b f_1(x) f_1(x) dx \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x) f_2(x) dx \neq 0.$$

Die Funktionen der Fourierreihe sind orthogonal zueinander

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Fourierreihe 1/2

Aus den bisherigen Überlegungen wissen wir, dass sich periodische Funktionen  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$  folgendermaßen darstellen lassen

$$g(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta.$$

Um die Koeffizienten  $A_k$  und  $B_k$  zu finden, nutzen wir die Orthogonalität der Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta \right) \cos n\theta \, d\theta \\ &= A_n\pi, \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \dots = B_n\pi.$$

## Fourierreihe 2/2

Für Funktionen mit allgemeiner Periode  $f(t) = f(t + T)$  erhalten wir durch die Variablentransformation  $\theta = 2\pi t/T$  die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi k}{T} t}_{\omega_k}\right) + B_k \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi k}{T} t}_{\omega_k}\right)$$

mit den Koeffizienten

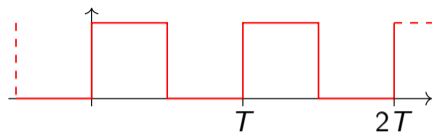
$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(\omega_k t) dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

**Hausaufgabe:** Leiten Sie diese Ausdrücke her.

## Beispiel 1/2

$$\text{Rechtecksignal } a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \frac{1}{2}T \\ 0, & \frac{1}{2}T < t \leq T \\ 1, & T < t \leq \frac{3}{2}T \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \frac{2}{T} \left| t \right|_0^{T/2} = 1,$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left| \frac{T}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right|_0^{T/2} = 0, \quad k > 0,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left| -\frac{T}{2\pi k} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right|_0^{T/2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k}, & k = 1, 3, \dots \\ 0, & k = 2, 4, \dots \end{cases}$$

## Beispiel 2/2

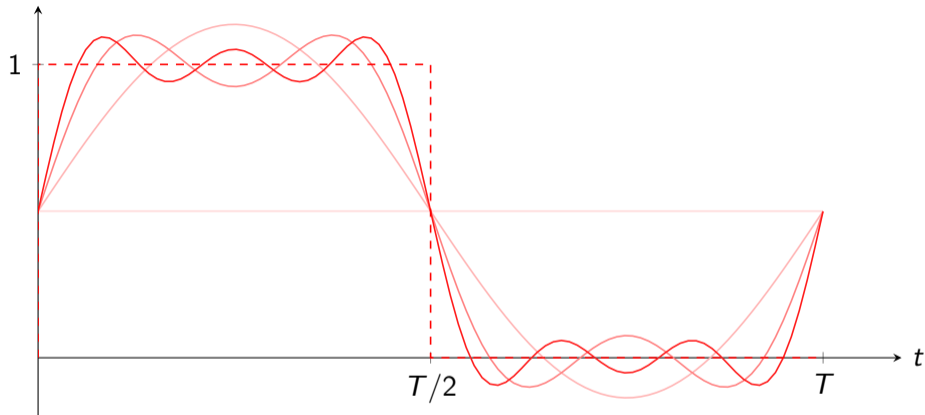
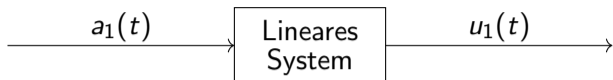


Figure: Approximation des Rechteckimpulses als Fourierreihe ( $k = 1, 2, 3, 5$ )



*SmarterEveryDay: Was ist eine Fourierreihe?*

# Superpositionsprinzip



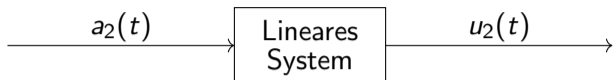
Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$a(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^K u_k(t)$$

# Superpositionsprinzip



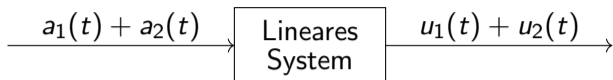
Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$a(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^K u_k(t)$$

# Superpositionsprinzip



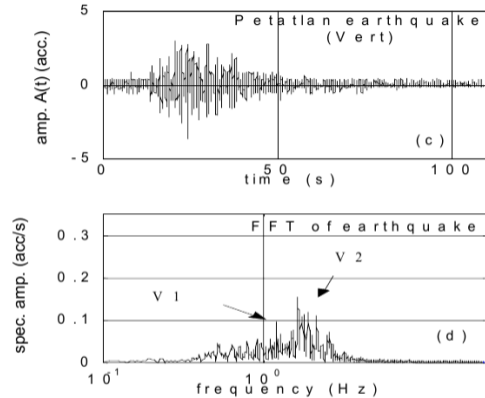
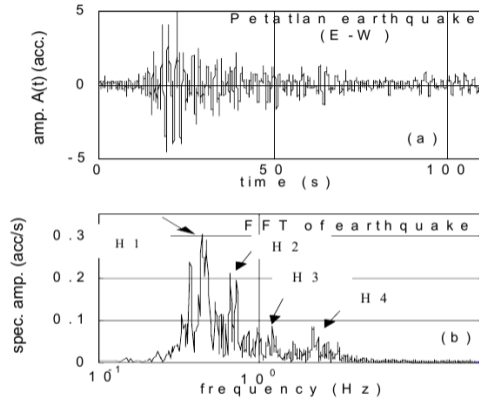
Vorgehen für den (allgemein) periodisch erregten Einmassenschwinger

$$a(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \approx \sum_{k=0}^K u_k(t)$$

# Anwendungsbeispiel



Zeitverlauf und Amplitudenspektrum der Bodenbeschleunigung während des Petatlan-Erdbebens 1979 [Hue<sup>+</sup>00], weiterführend sind Frequenzgehalt und Phasenlage in Abhängigkeit der Zeit zu analysieren.



- *3Blue1Brown: Was ist eine Fourier-Transformation?*
- *Seismic Academy #11 - Engineering Math: Fourier Analysis and Earthquake Engineering*
  - *mstkwn: SDOF Resonance Vibration Test*
  - *mstkwn: MDOF system forced vibration*

- Allgemeine Anregung (nichtperiodisch): Faltungsintegral [SKL08]
- Numerische Lösung: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen [SKL08; HNW08]

- [HNW08] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540566700. URL: <https://books.google.de/books?id=F93u7VcSRyYC>.
- [Hue<sup>+</sup>00] Carlos I Huerta-Lopez et al. "Time-frequency analysis of earthquake records". In: *12th World Conference on Earthquake Engineering, Auckland*. 2000.
- [SKL08] Jost A. Studer, Martin G. Koller, and Jan Laue. *Bodendynamik*. 3rd ed. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-29624-9.