Themenblock 2

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Gegeben sind die nachstehenden Differentialgleichungen.

(a) $F(x, y(x), y'(x), y'''(x)) = 0$

(b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4$

(c) $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\cos(2t)$

(d) $F(x, y, z) = 0$

(e) $2 \cdot \dot{x}(t) = 5t^2$

(f) $f^{(n)}(x) = \sin(2x)$

(g) $(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^2)\,\mathrm{d}y = 0$

(h) $y''(x) = 4x,\ y(1) = y'(1) = 0.$

Entscheiden Sie, welche der Gleichungen gewöhnliche bzw. partielle Differentialgleichungen sind. Geben Sie ebs. an, welche der gewöhnlichen Differentialgleichungen in expliziter bzw. impliziter Darstellung gegeben sind.

Aufgabe 2:

Überprüfen Sie, ob die Funktionen mit den Funktionstermen $y = f(x)$, $x \in D$, Lösungen der angegebenen Differentialgleichungen sind.

(a) $y = f(x) = \tan x,\ \ y' = 1 + y^2$

(b) $y = f(x) = e^{2x}x,\ \ y''' - 3y'' + 4y = 0$

(c) $y = f(x) = \ln x,\ \ (\ln x - 1)y'' - y'x + yx^2 = (\ln x - 1)^2$

Aufgabe 3:

Gegeben ist die 1-parametrige Schar ebener Kurven k_α mit

$$k_\alpha : \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

worin $\alpha \in \mathbb{R}$ den Scharparameter bezeichnet.

(a) Stellen Sie die Kurven k_α aus Formel (1) für $\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ graphisch dar.

(b) Zeigen Sie durch implizite Differentiation der Kurvengleichung (1), dass

$$y(x)^2 \cdot y'(x)^2 + y(x)^2 = 1 \tag{2}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung beschreibt, deren Lösungen $x \mapsto y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}$, die Kurvengleichung (1) erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass die Geraden $y = \pm 1$ als singuläre Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung in Formel (2) auftreten.

Aufgabe 4:

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = x$ (b) $y' = -\frac{y}{x}$

(c) $y' = y$ (d) $y' = xy$

Hinweis: Nutzen Sie jeweils die Isoklinen, um das Richtungsfeld zu skizzieren.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie jeweils die Isoklinenschar zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung. Skizzieren Sie diese im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(a) $y' = 3x$ (b) $y' = -x \cdot y$ (c) $y' = y - x$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie mittels Trennung der Variablen die allgemeine Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen.[1]

(a) $y'(x) = \frac{y(x)}{2x}$ (b) $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ (c) $y(x) \cdot y'(x) = x$ (d) $R \cdot \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{q(t)}{C} = 0$

Aufgabe 7:

Gegeben sind die nachstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

(i) $x^2 - y^2(x) + 2x \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0$ (ii) $y'(x) = \frac{1}{1+x-y(x)}$

(iii) $y''(x) = \frac{y'(x)}{x \cdot \ln x}$

in den Funktionen $x \mapsto y$, $x \in D$.

(a) Berechnen Sie mittels Substitution die allgemeine Lösung der Dgl. Diskutieren Sie dort, wo vorhanden, auch singuläre Lösungen.

(b) Skizzieren Sie die Lösungsscharen in einem kartesischen Koordinatensystem.[2]

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben durch Variation der Konstanten.

(a) $x \cdot y'(x) - y(x) = x^2 \cdot \cos x,\ \ y(\pi) = 2\pi$

(b) $y'(x) + (\tan x) \cdot y(x) = 5 \cdot \sin(2x)$, Lösungskurve durch Punkt $P(3\pi; 2)$

(c) $x \cdot y'(x) + y(x) = \ln x,\ \ y(1) = 1$

Aufgabe 9:

In einem sogenannten RL-Stromkreis mit einem ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L genügt die Stromstärke i der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R \cdot i = u. \tag{3}$$

Dabei ist $u = u(t)$ die von außen angelegte Spannung.

[1] Die Dgl. in (d) beschreibt die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einen Widerstand R, wobei $q(t)$ den zeitlichen Ladungsverlauf beschreibt.

[2] Überlegen Sie, warum Dgln. vom Typ $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ auch Ähnlichkeits-Dgln. genannt werden.

(a) Die Differentialgleichung (10) laute speziell

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 20 \cdot i = 10 \cdot \sin(2 \cdot t).$$

Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i = i(t)$ für den Anfangswert $i(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i = i(t)$ in Gleichung (10)

(i) bei konstanter Spannung $u(t) = \text{const.} = u_0$.

(ii) bei linear mit der Zeit ansteigender Spannung $u(t) = a \cdot t$ $(a > 0)$.

Aufgabe 10:

Berechnen Sie die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(x) + 2x \cdot y(x) - 2x^2 - 1 = 0$$

mithilfe eines Potenzreihen-Ansatzes für die gesuchte Funktion $x \mapsto y$ in der Form

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

Bestimmen Sie nach Einsetzen von $y(x)$ und $y'(x)$ in die Ausgangsgleichung die Koeffizienten a_n durch Koeffizientenvergleich. Ermitteln Sie ebs. den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 11:

Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(a) $-\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) = 9x(t)$ (b) $y''(x) + 2y' - 3y(x) = 0$ (c) $2y''(x) + 20y' + 50y(x) = 0$
(d) $y''(x) + 4y' + 13y(x) = 0$ (e) $y''(x) - 2a \cdot y' + a^2 \cdot y(x) = 0$ $(a \in \mathbb{R})$

Aufgabe 12:

Überprüfen Sie, welche der folgenden linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung konstante Koeffizienten besitzen. Unterscheiden Sie diese außerdem nach homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen.

(a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x$ (b) $x \cdot y''(x) - 2y'(x) = 0$
(c) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ (d) $2\ddot{x}(t) + x(t) = e^{-2t}$ (e) $y''(x) + y'(x) + x^2 \cdot y(x) = 0$

Aufgabe 13:

Gegeben seien das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{\cos x}{2x} \cdot y(x) + \frac{3}{4}x \quad (x \neq 0), \quad y(1) = 1. \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie näherungsweise mithilfe des Streckenzugverfahrens nach Euler ($h = 0.25$, auf vier Nachkommastellen gerundet) die Lösungskurve von (4) im Intervall $[1, 2]$. Skizzieren Sie den Streckenzug im angegebenen Intervall.

(b) Führen Sie eine Zweitrechnung mit doppelter Schrittweite $2h$ durch und schätzen Sie den Verfahrensfehler.

Aufgabe 14:

Gegeben seien die nichtlineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{x + y(x)^2}{x^2 + \frac{1}{4}} \tag{5}$$

in der gesuchten Funktion

$$x \mapsto y(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}$$

und die Anfangswertbedingung $y(-0.5) = 0$. In Abbildung 1 ist das Richtungsvektorfeld der Differentialgleichung (5) dargestellt.

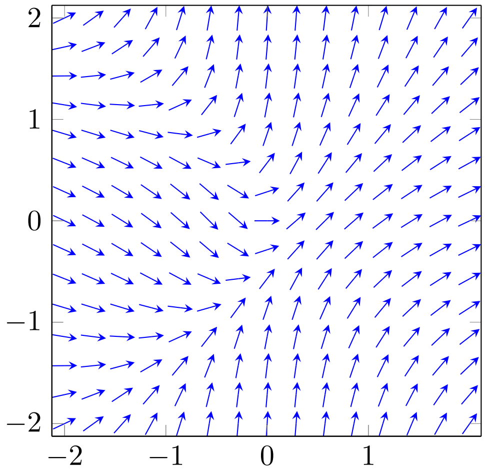

Figure 1: Richtungsvektorfeld der Differentialgleichung in Formelzeile (5).

(a) Zeigen Sie, dass die Isokline zum Wert $m = y'(x) = 0$ eine Parabel ist. Skizzieren Sie diese in Abbildung 1.

(b) Zeigen Sie, dass die Gerade zur Gleichung

$$y = x - \frac{1}{2} \tag{6}$$

eine Isokline beschreibt. Bestimmen Sie den Isoklinenwert $m = y'(x)$. Skizzieren Sie diese in Abbildung 1.

(c) Berechnen Sie näherungsweise den Ordinatenwert der Lösungskurve des Anfangswertproblems an der Stelle $x^* = 0.7$ unter Verwendung des Streckenzugverfahrens nach Euler mit einer Schrittweite von $h = 0.2$. Geben Sie das Ergebnis auf vier Nachkommastellen gerundet an.

(d) Führen Sie eine Zweitrechnung mit doppelter Schrittweite durch und geben Sie eine Schätzung des globalen Fehlers für den Ordinatenwert in x^* an.

Hinweis: Beim Streckenzug Verfahren ist der der **globale Fehler** an der Stelle x_{n+1} definiert als

$$\delta_{n+1} := |y(x_{n+1}) - y_{n+1}|$$

worin $y(x_{n+1})$ die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle x_{n+1} und y_{n+1} den mit dem Eulerverfahren berechneten Stützwert an dieser Stelle bezeichnen.

Der globale Fehler nimmt linear mit der Schrittweite ab. Hieraus folgt unmittelbar die Möglichkeit seiner Schätzung mittels

$$\delta_{n+1} \approx |\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|$$

worin $\tilde{y}_{n+1}$ den mit dem Eulerverfahren berechneten Stützwert an der Stelle x_{n+1} bei doppelter Schrittweite $\tilde{h} = 2h$ bezeichnet.

Aufgabe 15:

Die Differentialgleichung einer *freien gedämpften Schwingung* laute:

$$\ddot{x}(t) + p \cdot \dot{x}(t) + 2 \cdot x(t) = 0 \quad (p > 0).$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter p so, dass der *aperiodische Grenzfall* eintritt.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des aperiodischen Grenzfalls unter (a) für die Anfangsbedingungen $x(0) = 10$, $\dot{x}(0) = -1$. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf dieser Schwingung.

Aufgabe 16:

Untersuchen Sie mithilfe der Schwingungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = 0$$

die Bewegung einer Masse von $m = 50\text{kg}$, die mit einer elastischen Feder der Federkonstanten $c = 10200\text{N}/m$ verbunden ist, wenn das System die Dämpferkonstante $b = 2000\text{k}g/s$ besitzt.

Für die Bewegung werden die Anfangsbedingungen $x(0) = 0\text{m}$ und $\dot{x}(0) = 2.8\text{m}/s$ angenommen. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf dieser aperiodischen Bewegung.

Aufgabe 17:

Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + 2 \cdot y'(x) + y(x) = q(x)$$

mit dem Störglied $q(x)$.

Ermitteln Sie für die nachfolgenden Störglieder den jeweiligen Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung.

(a) $q(x) = x^2 - 2x + 1$ (b) $q(x) = x^3 - x$ (c) $q(x) = 3 \cdot e^{-x}$
(d) $q(x) = 2 \cdot e^x + \cos x$ (e) $q(x) = e^{-x} \cdot \cos x$

Aufgabe 18:

Zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x \mapsto y = f_i(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2\}$$

werden als Basislösungen bezeichnet, wenn

$$W(f_1, f_2)(x_0) := \det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für ein } x_0 \in D$$

d. h. von Null verschieden ist.[3] $W(f_1, f_2)$ heißt Wronski-Determinante.

[3] Zwei Basislösungen sind insbesondere linear unabhängig. Gilt hingegen $W(x_0) = 0$ für zwei Lösungen f_1 und f_2 und alle $x_0 \in D$, so folgt hieraus nicht, dass f_1 und f_2 linear abhängig sind.

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Beispielen eine Basis vorliegt.

(a) $f_1(x) = \sin(\omega x),\ \ f_2(x) = \cos(\omega x),\ \ f'' + \omega^2 f = 0$ (Schwingungsgleichung)

(b) $f_1(x) = e^{2x},\ \ f_2(x) = e^{-4x},\ \ f'' + 2f' - 8f = 0$

Aufgabe 19:

Gegeben sind die inhomogenen linearen Differentialgleichungen der Form

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = q(x) \quad (a_i \in \mathbb{R},\, n \geq 2).$$

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen von

(a) $y''' + y' = e^x$

(b) $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2$

(c) $y''' - 3y' + 2y = 2e^x + \sin x$

(d) $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}$

(e) $y'' - 4y' + 4y = (x-3)e^{2x}$

(f) $y'' - 7y' + 6y = 12x - 2$

(g) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$

(h) $y''' + 2y'' + y' = 10 \cos x$

Aufgabe 20:

Die charakteristische Gleichung 4. Grades einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung mit konstanten (reellen) Koeffizienten besitzt die doppelt zu zählende Lösung $\lambda_{1,2} = -1 - i$, wobei i mit $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

Ermitteln Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 21:

Ermitteln Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

deren Lösungsschar alle Parabeln umfasst, die den Koordinatenursprung $O(0,0)$ enthalten und eine zur y-Achse parallele Achse besitzen.

Hinweis: Überlegen Sie, wie viele (unabhängige) Parameter die Parabelschar besitzt.

Aufgabe 22:

Gegeben ist die Lösungs(-kurven-)schar

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung 3. Ordnung (C_1, C_2, und C_3 sind Scharparameter).

(a) Begründen Sie, dass (10) einer Differentialgleichung der Form $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ mit konstanten Koeffizienten a, b, c und d genügt.[4] Berechnen Sie diese Koeffizienten.

[4] Die Differentialgleichung enthält keinen der Scharparameter C_1, C_2 oder C_3, ist also für jede Wahl erfüllt.

(b) Geben Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ an, d. h. bestimmen Sie die Scharparameter.

Aufgabe 23:

Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Methode die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = 1 + y(x)^2$
(b) $y'(x) = x^2 + 1$
(c) $y'(x) = \frac{2x \cdot y(x)}{1+x^2}$
(d) $y'(x) + y(x) \cdot \tan x = 0$
(e) $y'(x) = \sqrt{\frac{y(x)}{x}}$, $x > 0$
(f) $y'(x) = (x + y(x) + 1)^2$
(g) $y'(x) = \frac{x}{y(x)} - \frac{y(x)}{x}$

in den Funktionen $x \mapsto y$ mit $x \in D$.

Aufgabe 24:

Lösen Sie die folgenden trennbaren und/oder linearen Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{\mathrm{e}^x}{y}$,
(b) $x^2 + y - xy' = 0$,
(c) $y' + \sin x = (\tan x)y$,
(d) $y' = (y - 3)\cos x$.

Aufgabe 25:

Gegeben ist eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in der unbekannten Funktion $x \mapsto y(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$

$$y''(x) - 2 \cdot a \cdot y'(x) + \left(a^2 + b^2\right) \cdot y(x) = 0 \tag{8}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ Parameter beschreiben.

Weisen Sie nach, dass die Funktion $f_1 : x \mapsto y = f_1(x)$ mit

$$f_1(x) = \cos(b \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung in Formel (8) für jede Wahl der Parameterwerte a und b ist.

Aufgabe 26:

(a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - x^2 \cdot y(x) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1 \tag{9}$$

mithilfe eines Potenzreihen-Ansatzes für die gesuchte Funktion $x \mapsto y(x)$ in der Form

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

unter Verwendung eines Koeffizientenvergleiches.

(b) Stellen Sie den Funktionsgraph der abgebrochenen Potenzreihe $S_k(x) \sim y(x)$, welche die ersten sechs von Null verschiedenen Summanden von (10) enthält, im Intervall $[-2.5; 1.5]$ graphisch dar.

Aufgabe 27:

Gegeben ist folgende Differentialgleichung

$$y' = \frac{3x^2 + 2y^2}{2xy}.$$

Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(1) = 2$.

Aufgabe 28:

Die nachstehenden Differentialgleichungen 2. Ordnung sind in expliziter Form

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \tag{11}$$

gegeben oder lassen sich in diese überführen. Einzelne der Größen x, $y(x)$, $y'(x)$ treten nicht auf.

Diskutieren Sie spezielle Lösungsansätze und berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen.

(a) $\ddot{y}(t) = 3 + 2t + 5t^2$

(b) $y''(x) = y'(x) - e^x$

(c) $(1 - x^2) \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) = 0 \quad (x^2 \neq 1)$

(d) $y(x) \cdot y''(x) = (y'(x))^2$

Aufgabe 29:

Gegeben ist eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot y^{(k)}(x)\right) + a_0 \cdot y(x) = q(x), \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad a_n \neq 0 \tag{12}$$

in der gesuchten Funktion $x \mapsto y = f(x)$ mit $x \in D \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Nennen Sie für die nachstehenden Störfunktionen $x \mapsto q(x)$, $x \in D$ Lösungen λ der charakteristschen Gleichung, für welche mathematische Resonanz vorliegt.

   (i) $q(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot x^k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{R}$ und $b_m \neq 0$

   (ii) $q(x) = k \cdot \exp(ax)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$

   (iii) $q(x) = k_1 \cdot \cos(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $k_1 \in \mathbb{R}$

   (iv) $q(x) = k_2 \cdot \sin(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$

   (v) $q(x) = k_1 \cdot \cos(bx) + k_2 \cdot \sin(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$

   (vi) $q(x) = k_1 \cdot \exp(ax) \cdot \cos(bx)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $k_1 \in \mathbb{R}$

   (vii) $q(x) = k_2 \cdot \exp(ax) \cdot \sin(bx)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$

   (viii) $q(x) = \exp(ax) \cdot (k_1 \cdot \cos(bx) + k_2 \cdot \sin(bx))$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$

(b) Geben Sie einen Ansatz $y_s(x)$ für sine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (12) in Teilaufgabe a an, wenn λ eine r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung (12) ist.