01 Symmetrische Matrizen

Nichtlineare Optimierung

WS 2020/21

Symm. Matrizen in der Optimierung

- Hessematrizen (2. Ableitung von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- in QPs (Kap. 2)
- Innenprodukte
- Vorkonditionierer

$\Big\}$ im Raum der Variablen $\mathbb{R}^n$

Spektralzerlegung

Eigenzerlegung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. $A = A^T$

Dann existieren $V^T V = I$ $v_i^T v_j = \delta_{ij}$

- eine orthogonale Matrix $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $v_1\ v_2\ v_3$
- eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Eigenwerte $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

sodass gilt:

$$A = V \Lambda V^T. \iff AV = V\Lambda$$

mult. von rechts mit V

$$A \begin{pmatrix} | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & & \\ 0 & \bullet & \\ 0 & & \bullet \end{pmatrix}$$

$$A \quad v_j = \lambda_j v_j$$ (Eigenwertproblem)

Rayleigh-Quotient

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

wird angenommen für $x = EV$

quadratische Form

$$\lambda_{\min} \le \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \le \lambda_{\max} \frac{\cancel{\|x\|^2}}{\cancel{\|x\|^2}}$$

$$\underbrace{x^T V}_{y^T} \underbrace{\Lambda}_{(\because)} \underbrace{V^T x}_{y} = \sum_j \lambda_j y_j^2 \le \lambda_{\max} \sum_j y_j^2 = \lambda_{\max} \|y\|^2$$

$$\ge \lambda_{\min} \sum_j y_j^2 = \lambda_{\min} \|y\|^2$$

$$\|y\|^2 = \|V^T x\|^2$$

$$= x^T \underbrace{V V^T}_{= I} x$$

$$= x^T x = \|x\|^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} & V^T V = I \\ \Leftrightarrow\ & V^T = V^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & V V^T = I \end{aligned}}$$

Definitheit

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, wenn gilt: $x^T M x > 0$ für alle $x \neq 0$

Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn gilt:
alle EW von M sind > 0

$M = V \Lambda V^T$

Für die Inverse gilt:

M^{-1} hat dieselben EV und reziproke EW

$$M^{-1} = V \underbrace{\Lambda^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}} V^T$$

Skalarprodukte

$(x,y)_M := x^T M y$

Symmetrische positiv definite (spd) Matrizen M spielen eine besondere Rolle.

Die spd Matrizen repräsentieren genau die Skalarprod. in $\mathbb{R}^n$

- $(x,y)_M = (y,x)_M$
- $(x, \alpha y + \beta z)_M = \alpha (x,y)_M + \beta (x,z)_M$
- $(x,x)_M \geq 0$
- $(x,x)_M = 0 \iff x = 0$

Kurze Zwischenfrage

Bis hierher alles klar?

→ Umfrage

4 A Kenne ich alles schon.

1 B Ich dachte, wir machen hier Optimierung?

11 C Hatte ich schon mal verstanden, aber Wiederholung ist nicht schlecht.

5 D Alles neu für mich.

Matrixwurzel

Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spd.

$M = W \Delta W^T$ Spektralzerlegung

positiv, Einträge $\delta_j > 0$

Gesucht ist eine spd Matrix $M^{1/2}$ mit der Eigenschaft $\boxed{M^{1/2} = W \Delta^{1/2} W^T}$

$\Delta^{1/2} = \begin{pmatrix} \delta_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n^{1/2} \end{pmatrix}$

$$✓\ M^{1/2}M^{1/2} = M$$

$W \Delta^{1/2} \underbrace{W^T W}_{=I} \Delta^{1/2} W^T = W \underbrace{\Delta^{1/2} \Delta^{1/2}}_{=\Delta} W^T$

$= W \Delta W^T = M$

Verallgemeinerte Spektralzerlegung

verallgemeinertes Eigenwertproblem

hier: A symmetrisch, $\boxed{Av = \lambda M v} = \lambda M^{1/2} \underbrace{M^{1/2} v}_{= z}$

M spd

$\iff A v = \lambda M^{1/2} z \quad ; \quad v = M^{-1/2} z$

$\iff \underbrace{M^{-1/2} A M^{-1/2}}_{= W \Lambda W^T} z = \lambda z$ gewöhnliches EWP

mit $W^T W = W W^T = I$

$$\iff \boxed{A = \underbrace{M^{1/2} W}_{V} \Lambda \underbrace{W^T M^{1/2}}_{V^T}}$$

mit $V^T M^{-1} V = W^T \underbrace{M^{1/2} M^{-1} M^{1/2}}_{= I} W = I$

und $V V^T = \dots M$

Verallgemeinerter Rayleigh-Quotient

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd.

$$\lambda_{\min}(A;M) \le \frac{x^\top A\, x}{\|x\|_M^2} = \frac{x^\top A\, x}{x^\top M\, x} \le \lambda_{\max}(A;M)$$

Die Rolle von M

In der Vorlesung wird durchgängig mit M eine Matrix bezeichnet, die

- spd und
- vom Benutzer gewählt ist
- und die das Skalarprodukt/die Metrik im Raum $\mathbb{R}^n$ der Optimierungsvariablen festlegt.

There is nothing special about $M = I$!

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

$\rightarrow$ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2