

Themenblock 1

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1. Entscheiden und begründen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots + \frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(2k+2)!} + \dots \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{3}$$

$$\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + - \dots \tag{4}$$

konvergieren oder divergieren.

Aufgabe 2. Die zur unendlichen Zahlenfolge

$$n \mapsto a_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \emptyset)$$

gebildete unendliche Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

heißt *harmonische Reihe*.

- (a) Bilden Sie die Teilsummen s_n zum Index $n = 2^m$ und schätzen Sie diese durch Vergleichssummen von Potenzen $\frac{1}{2^p}$ mit $p \in \{0, 1, \dots, m\}$ nach unten ab.
- (b) Zeigen Sie mithilfe von Teilaufgabe (a), dass die Reihe $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ keinen Grenzwert besitzt.
- (c) Untersuchen Sie die unendliche Reihe $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz durch Vergleich mit der harmonischen Reihe.

Aufgabe 3. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie auch die Randpunkte des Konvergenzbereichs auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}(x+2)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$

Aufgabe 4. Gegeben sind die Funktionen f_k ($k \in \mathbb{N}$) der reellen Variablen x ,

$$f_k : x \mapsto f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Geben Sie die Glieder $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_{10}(x)$ und $s_{100}(x)$ der Funktionenreihe $(s_n(x))_{n=0}^\infty$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

an und skizzieren Sie deren Funktionsgraphen zusammen im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion (Summe der Funktionenreihe) $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Aufgabe 5. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n.$$

Treffen Sie (wenn möglich) Aussagen über das Konvergenzverhalten an den Stellen $x = 3$, $x = 2$, $x = 6$ und $x = -10$ in den folgenden drei Fällen:

- (a) der Konvergenzradius ist 3;
- (b) die Potenzreihe konvergiert für $x = 4$ und divergiert für $x = 1$;
- (c) die Abschätzung $0 \leq a_n \leq \frac{n}{5^n}$ gilt für alle n .

Hinweis: Für die Bearbeitung der letzten Teilaufgabe benutzen Sie günstigerweise den Ansatz

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

für die Abschätzung des Konvergenzradius r (Formel von Cauchy-Hadamard).

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Nutzen Sie dazu

- (a) eine Taylorreihenentwicklung
- (b) die Summenformel einer geometrischen Reihe
- (c) die bekannte Reihe für $\ln(1+x)$ (siehe Tafelwerk bzw. 1c)) und gliedweise Differentiation nach x

Geben Sie ferner den Konvergenzbereich der ermittelten Potenzreihe an.

Aufgabe 7. Gegeben sei das (von $x > 0$ abhängige) Integral

$$I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{5}$$

welches auch als *Gaussches Fehlerintegral* bezeichnet wird.

- (a) Entwickeln Sie den Integranden an der Stelle $t = 0$ in seine Potenzreihe. Brechen Sie die Reihenentwicklung nach dem dritten (von Null verschiedenen) Glied ab.
- (b) Berechnen Sie näherungsweise das gegebene Integral durch Verwendung der Näherung in (a).
- (c) Geben Sie $I(1)$ auf vier Dezimalen nach dem Komma an. Veranschaulichen Sie den Wert als Flächeninhalt im Koordinatensystem.

Aufgabe 8. Wir betrachten einen Kupferdraht mit Länge $l = 500$ m, Durchmesser $d = 2$ mm und Dichte $\rho = 8.9 \text{ g cm}^{-3}$. Der Durchmesser ist mit einer Ungenauigkeit von 0.01 mm gemessen worden. Nutzen Sie die Taylor-Formel bis zum linearen Glied um eine Abschätzung für den absoluten und den relativen Fehler beim Bestimmen der Masse des Kupferdrahtes (verursacht durch die Ungenauigkeit beim Messen) zu erhalten. Gehen Sie wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Funktion $m(d)$ welche die Masse des Drahtes in Abhängigkeit des Durchmessers d angibt. Achten Sie auf die Einheiten!
- Bestimmen Sie das Taylorpolynom p_1 für m bis zum linearen Glied unter Verwendung des Entwicklungspunktes $d_0 = 2$ mm.
- Leiten Sie aus dem Taylorpolynom approximative Schranken für den Fehler $\Delta m = m(d) - m(d_0)$ her.
- Setzen Sie die Schranken aus Aufgabe (c) ins Verhältnis zum tatsächlichen Funktionswert $m(d_0)$ um die relativen Fehler zu erhalten.

Aufgabe 9. Nähern Sie die Sinuskurve zur Funktion

$$f : x \mapsto \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

in der Umgebung ihres ersten Maximums x_0 im positiven x -Bereich durch eine Parabel an.

- Entwickeln Sie dazu die Taylor-Reihe $P_f(x)$ zu $f(x)$ um die Stelle x_0 und brechen Sie diese nach dem quadratischen Glied ab.
- Zeigen Sie, dass für das Taylor-Polynom $P_2(x)$ zweiten Grades von $f(x)$ in x_0 gilt:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2'(x_0) = f'(x_0), \quad P_2''(x_0) = f''(x_0).$$

- Skizzieren Sie den Verlauf von $f(x)$ und $P_2(x)$ in der Umgebung von x_0 .

Aufgabe 10. Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = 3 \sin x + 2 \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$ | (c) $f(x) = e^{\sin(2x)}, \quad x \in \mathbb{R}$ |
| (b) $f(x) = 3 \tan\left(x + \frac{3}{2}\pi\right), \quad x \in D \subset \mathbb{R}$ | (d) $f(x) = \left \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right , \quad x \in \mathbb{R}.$ |

Untersuchen Sie die Funktionen auf Periodizität. Geben Sie, wo möglich, die (kleinsten) Perioden und die dazugehörigen Kreisfrequenzen an.

Aufgabe 11. Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \quad \text{für } x \in [-2, 2)$$

die periodisch fortgesetzt wird mit $f(x) = f(x + 4)$ für $x \in \mathbb{R}$.

- Skizzieren Sie den Funktionsgraph G_f im Intervall $[-4, 6]$.
- Geben Sie die Fundamentalperiode von f an und bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω .
- Entwickeln Sie die Funktion f in deren Fourier-Reihe. Berechnen Sie die auftretenden Fourierkoeffizienten mithilfe eines schriftlichen Verfahrens bzw. begründen Sie in den Fällen, in denen deren Wert auch ohne Rechnung bestimmt werden kann.
- Bestimmen Sie - falls vorhanden - alle Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$, für welche die Fourier-Reihe nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 12. Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe:

$$(a) \sum_{n=0}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (b) \sum_{n=1}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (c) \sum_{n=0}^7 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Aufgabe 13. Geben Sie jeweils, sofern möglich, eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften an!

- (a) (a_n) sei nach oben beschränkt. (d) (d_n) sei unbeschränkt, aber nicht monoton.
 (b) (b_n) sei beschränkt und streng monoton steigend. (e) (e_n) sei unbeschränkt und konvergent.
 (c) (c_n) sei beschränkt, aber nicht konvergent. (f) (f_n) sei monoton, beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 14. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz mittels Majoranten bzw. Minoranten:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+10}.$$

Aufgabe 15. Gegeben sind die unendlichen Potenzreihen $(s_n(x))$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \cdot \frac{x^k}{k} \right) \quad (6)$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2} \quad (7)$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{2^k} \quad (8)$$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+1}{k!} x^k \right) \quad (9)$$

- (a) Geben Sie für $x = 1$ ($x = -1$) jeweils die zugehörige unendliche Zahlenreihe an und untersuchen Sie diese auf Konvergenz.
 (b) Bestimmen Sie für die Potenzreihen den Konvergenzradius und Konvergenzbereich. Untersuchen Sie ebf. auf Konvergenz in den Randpunkten.

