Hausaufgabenblatt 2: Optimierung unter Nebenbedingungen

Oskar Rössel
Matrikel Nr. 617361

Emely-Sue Forizs
Matrikel Nr. 594745

2.1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$

$h_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$

$h_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) - \lambda_1 \cdot h_1(x_1, x_2, x_3) - \lambda_2 \cdot h_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_2 - \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) - \lambda_2 \cdot (x_3 - \tfrac{1}{2})$$

$$\operatorname{grad} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \cdot 2x_1 \\ 1 - \lambda_1 \cdot 2x_2 \\ -\lambda_1 \cdot 2x_3 - \lambda_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\underline{I}$ $-\lambda_1 \cdot 2x_1 = 0$

$\underline{II}$ $1 - \lambda_1 \cdot 2x_2 = 0$

$\underline{III}$ $-\lambda_1 \cdot 2x_3 - \lambda_2 = 0$

$\underline{IV}$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$

$\underline{V}$ $x_3 - \frac{1}{2} = 0$

$\underline{V}$ $x_3 - \frac{1}{2} = 0 \quad | + \frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{1}{2}$

$$\text{I} \quad -\lambda_1 \cdot 2x_1 = 0 \qquad | \cdot x_2$$
$$\text{II} \quad -\lambda_1 \cdot 2x_2 + 1 = 0 \qquad | \cdot x_1$$

$$\text{I} \quad -\lambda_1 \cdot 2x_1 \lambda_2 = 0 \qquad (-)$$
$$\text{II} \quad -\lambda_1 \cdot 2x_1 x_2 + x_1 = 0$$
$$\underline{x_1 = 0}$$

in $\underline{\text{IV}}$: $0^2 + x_2^2 + 1/4 - 1 = 0$

$$x_2^2 - 3/4 = 0 \qquad | + 3/4$$
$$x_2^2 = 3/4 \quad | \sqrt{} \qquad \underline{x_2 = \pm\sqrt{3/4}}$$

$\Rightarrow$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = \pm\sqrt{3/4}$$
$$x_3 = 1/2$$

$$\text{grad } h_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{grad } h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 = 2x_1 \\ 0 = 2x_2 \\ 1 = 2x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1/2 \end{matrix}$$

$$h_1(0, 0, x_3) = 0 + 0 + x_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_3^2 = 1$$
$$\Rightarrow x_3 = \pm\sqrt{1}$$
$$h_2(0, 0, x_3) = x_3 - 1/2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1/2$$

$\downarrow$

$1/2 \neq \pm\sqrt{1}$ $\lightning$ linear unabhängig

$\Rightarrow \mathcal{L}: \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) ; \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$

$\rightarrow$ Nebenbedingungen erfüllt?

1) $h_2(x) = x_3 - \frac{1}{2} = 0 \quad , x_3 = \frac{1}{2}$

$\quad \rightarrow 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ w.A.

2) $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$

Fall 1): $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$0 = 0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$1 = 1$ w.A.

Fall 2): $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$0 = 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$1 = 1$ w.A.

Minimum finden: $f(x) = x^2$

$\hookrightarrow$ mit $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\hookrightarrow$ mit $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\hookrightarrow$ ges.: Min. der Funktion mit $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

und $x_3 = \frac{1}{2}$ $\quad \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ entfällt

2.2 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$

$g_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1(x_1, x_2) = 4 - x_1^2 \geq 0$

$g_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_2(x_1, x_2) = 1 - x_2^2 \geq 0$

a) grad $g_1 = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ grad $g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}$

$\to$ grad $g_1(x) = x \cdot \nabla g_2(x)$

$\begin{pmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ entspricht stets $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↯ linear unabh.

aber wenn $x_1 = x_2 = 0$ ↯ linear abhängig

Nebenbed. erfüllt?

$g_1(0) = 4 - 0 = 4 \geq 0$ w. A.

$g_2(0) = 1 - 0 = 1 \geq 0$ w. A. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mögl. Lösung

b) $L(x) = 5x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - \mu_1(4 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_2^2)$

grad $L(x) = \begin{pmatrix} 5 - 2x_1 + 2x_1\mu_1 \\ 2 - 2x_2 + 2x_2\mu_2 \\ 4 - x_1^2 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix}$

KKT Bedingungen:

I und II: $4 - x_1^2 = 0$

$1 - x_2^2 = 0$

$\underline{III}$: $5 - 2x_1 + 2x_1\mu_1 = 0$ (I)

$2 - 2x_2 + 2x_2\mu_2 = 0$ (II)

$4 - x_1^2 = 0$ (III)

$1 - x_2^2 = 0$ (IV)

$\underline{IV}$ $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $(4 - x_1^2) \geq 0$, $(1 - x_2^2) \geq 0$

$\underline{V}$ $\mu_1(4 - x_1^2) + \mu_2(1 - x_2^2) = 0$

c) 1. Fall: $\mu = 0$, $\mu_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
I: 5 - 2x_1 + 2x_1\mu_1 &= 0 && \text{mit } \mu_1 = 0 \\
5 - 2x_1 &= 0 && \mid -5 \\
-2x_1 &= -5 && \mid :(-2) \\
x_1 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

in $g_1(x)$

$g_1\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 4 - 6{,}25 \geq 0$

$\Rightarrow -2{,}25 \geq 0$ f.A.

$\Rightarrow \mu_1$ darf nicht 0 sein $\Rightarrow$ Fall 1 kommt nicht in Frage

2. Fall: $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
II: 2 - 2x_2 + 2x_2\mu_2 &= 0 && (\text{mit } \mu = 0) \\
2 - 2x_2 &= 0 && \mid -2
\end{aligned}
$$

$$-2x_2 = 0 \quad | :(-2)$$

$$\underline{x_2 = 1}$$

in $g_2(x)$

$g_2(1) = 1 - 1^2 \geq 0 \qquad 0 \geq 0$ w. A.,

da $\mu_1 \neq 0$ gilt nach KKT : $\overline{V}$: $(4 - x_1^2 = 0)$

$$4 - x_1^2 = 0 \quad | -4$$
$$-x_1^2 = -4 \quad | \cdot(-1)$$
$$x_1^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x_1 = \pm 2$$

Validheitsprüfung in I

$$I: 5 - 2x_1 + 2x_1\mu_1 = 0 \quad | x_1 = 2$$
$$5 - 4 + 4\mu_1 = 0$$
$$1 + 4\mu_1 = 0 \quad | -1$$
$$4\mu_1 = -1 \quad | :4$$

$\mu_1 = -\frac{1}{4} \qquad \mu_1 \geq 0$ ↯ entfällt (KKT : $\overline{IV}$)

$$I: 5 - 2x_1 + 2x_1\mu_1 = 0 \quad | x_1 = -2$$
$$5 + 4 - 4\mu_1 = 0$$
$$9 - 4\mu_1 = 0 \quad | -9$$
$$-4\mu_1 = -9 \quad | :(-4)$$

$\mu_1 = 9/4 \geq 0$ (mögl. Lösung)

↳ Lösung Fall 3 : $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

4. Fall : $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$

↳ aus $\mu_1 \neq 0$ folgt $x_1 = -2$ (siehe 2. Fall)

↳ aus $\mu_2 \neq 0$ folgt → es gilt $(1-x_2^2)$

$$1 - x_2^3 = 0 \quad | -1$$
$$-x_2^2 = -1$$
$$\underline{x_2 = \pm 1}$$

$x_2 \neq 1$ in II (Prüfung d. Validät)

$$\text{II}: \quad 2 - 2x_2 + 2x_2\mu_2 = 0 \quad \text{mit } x_2 = 1$$
$$2 - 2 + 2\mu_2 = 0$$
$$2\mu_2 = 0 \quad |:2$$
$$\mu_2 = 0 \quad \mu_2 \neq 0 \text{ bei Fall 4}$$

→ entfällt

$$\text{II}: \quad 2 - 2x_2 + 2x_2\mu_2 = 0 \quad (\text{mit } x_2 = -1)$$
$$2 + 2 - 2\mu_2 = 0$$
$$4 - 2\mu_2 = 0 \quad |-4$$
$$-2\mu_2 = -4 \quad |:(-2)$$
$$\mu_2 = 2 \quad (\text{mögl. Lösung})$$

↳ Lösung von Fall 4 : $x_1 = -2$, $x_2 = -1$

↳ alle Möglichkeiten für $f(x_1^*, x_2^*) =$

$$\underline{\underline{\{(0;0), (-2;1), (-2;-1)\}}}$$

d) Welcher der x-Anteile stellt den Maximumpkt.

das $<$ → in f(x) einsetzen

$$f((0;0)) = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0^2 - 0^2$$

$$\underline{f((0;0)) = 0}$$

$$f(-2;1) = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - (-2^2) - (1)^2$$
$$= -10 + 2 + 4 - 1$$
$$\underline{f(-2;1) = -13}$$

$$f(-2;-1) = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) - (-2)^2 - (-1)^2$$
$$= -10 - 2 - 4 - 1$$
$$\underline{f(-2,-1) = -17}$$

$0 < -13 < -17$ ist das Minimum bei $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$