

Übungsblatt 20

Aufgabe 1. Gegeben sind räumliche Bereiche in \mathbb{R}^3 , die jeweils durch Flächen zu den Gleichungen

- (a) $x + y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 4$
- (b) $x - y + z = 6$, $x + y = 2$, $x = y$, $y = 0$, $z = 0$
- (c) $z = 0$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 9$
- (d) $z = x^2 + y^2$, $z = 4$

begrenzt werden.

Stellen Sie Bereichsintegrale zur Berechnung der Volumeninhalte dieser Bereiche auf und berechnen Sie diese unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 2. Gegeben sei der dreidimensionale Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad x + 2y + 4z \leq 1 \quad (1)$$

- (a) Skizzieren Sie B in Formelzeile (1) als Punktmenge bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems.
- (b) Fassen Sie B auf verschiedene Weise als Normalbereich in kartesischen Koordinaten auf. Ergänzen Sie hierfür in den nachfolgend aufgeführten Integralen $\int_B f \, dV$ (Integrandfunktion f , Volumendifferential dV) die Grenzen.

$$\begin{aligned} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dx \, dy \, dz &= \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dx \, dz \, dy = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dy \, dx \, dz = \\ \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dy \, dz \, dx &= \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dz \, dx \, dy = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

- (c) Berechnen Sie unter Benutzung der Rechenregeln für bestimmte Integrale (schriftlich!) das Dreifachintegral

$$\int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=0}^{1-2y} \int_{z=0}^{\frac{1}{4} - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}} 24xy^2 \, dz \, dx \, dy$$

Aufgabe 3. Wir betrachten den Bereich B und die Funktion f gegeben durch

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x^2 - 4x + 3\} \quad \text{und} \quad f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{2-x}{y+1}.$$

- (a) Skizzieren Sie den Bereich B in einem Koordinatensystem.
- (b) Berechnen Sie die y -Koordinate des geometrischen Schwerpunkts (x_S, y_S) von B .
- (c) Berechnen Sie das Volumen der Funktion f über dem Bereich B . Nutzen Sie dazu die Substitutionsregel.

Aufgabe 4. Gegeben ist die Dreiecksfläche B in der xy -Ebene mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad (1, 0) \quad \text{und} \quad (1, 1)$$

Berechnen Sie unter geeigneter Festlegung von B als Normalbereich in kartesischen Koordinaten

$$\iint_B \frac{\sin x}{x} dx dy$$

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 16 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Gegeben ist die vom reellen Parameter $a > 0$ abhängige Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - a) \cdot e^{\frac{x}{a}}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Fläche, welche durch Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzt wird, genau 2 Flächeneinheiten groß ist.

Vertiefung

Aufgabe 6. Gegeben ist die Dreiecksfläche B in der xy -Ebene mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad (1, 0) \quad \text{und} \quad (0, 1)$$

Zeigen Sie unter geeigneter Festlegung von B als Normalbereich in kartesischen Koordinaten, dass

$$\iint_B y^m dx dy = \frac{1}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

gilt. Berechnen Sie die Bereichsintegrale anstelle über y^m über $x^1 \cdot y^m$, $x^2 \cdot y^m$ usw.