Themenblock 4

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D der folgenden Funktionen und geben Sie den Wertebereich W an.

(a) $f_1 : x \mapsto 1 + \sqrt[3]{x + 2x^2}$

(b) $f_2 : x \mapsto 2|1 - x| + 3|2x - 3|$

(c) $f_3 : x \mapsto \tan(x + \varphi),\ \varphi > 0$

(d) $f_4 : x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \in \mathbb{R}^\times \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

(e) $f_5 : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}(x)\right) x^2$

Die Funktion $f_4 : x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ wird *Signum*- oder *Vorzeichenfunktion* genannt. Warum?

Aufgabe 2:

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit den Definitionsmengen $D \subset \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sqrt{x+1},\ D = [-1, \infty)$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$

(c) $f(x) = \ln(|x| - x),\ D = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.

Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob f (auf ihrer Definitionsmenge D) umkehrbar ist. Geben Sie in den Fällen, in denen dies möglich ist, die Umkehrfunktion an f^{-1} zu f an.

Hinweis: Zur Angabe der Umkehrfunktion gehören ebs. deren Definitions- und Zielmenge.

Stellen Sie die Funktionsgraphen G_f und $G_{f^{-1}}$ gemeinsam in der reellen Ebene dar.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f : [1; \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

(a) Erklären Sie f als Komposition $g \circ h$ zweier umkehrbar eindeutiger Funktionen g und h.

(b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} zu f und schreiben Sie diese als Komposition der Umkehrfunktion von g und h.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie unter Benutzung der Eigenschaften der jeweiligen Funktionsklasse alle Nullstellen der reellen Funktionen

$$h_j : x \mapsto y = h_j(x), \quad j \in \{1; 2; 3\}$$

in der reellen Variablen $x \in D_i$,

(a) $h_1(x) = x^4 - 3x^3 + 2x,\ D_1 = \mathbb{R}$

(b) $h_2(x) = \sin(\omega x + \varphi)\ \ (\omega \neq 0),\ D_2 = \mathbb{R}$

(c) $h_3(x) = 2\cos(3x) - 1,\ D_3 = \mathbb{R}$

(d) $h_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ D_4 = \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = (\cos t\,; \sin t) \qquad \text{und} \qquad g(x; y) = \cos x \cdot \sin y$$

und maximal möglichen Definitionsmengen.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Berechnen Sie die Bilder von $t = \frac{\pi}{3}$ unter f bzw. von $x = y = \frac{\pi}{4}$ unter g.

(b) Berechnen Sie alle $(x; y) \in [0; 2\pi) \times [0; 2\pi)$ mit $g(x; y) = 0$.

(c) Fassen Sie $f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ als Koordinaten eines Punktes P auf[1]

$$(\cos t\,; \sin t) \quad \leftrightarrow \quad P(\cos t\,; \sin t)$$

und beschreiben Sie den Wertebereich W_f in der reellen Ebene.

Aufgabe 6:

(a) Von einer Sinusschwingung der Form $t \mapsto y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ und $\omega > 0$ sind folgende Daten bekannt:

- Erstes Maximum $y_{\max} = 5$ zum Zeitpunkt $t_1 = 3$
- Erstes Minimum $y_{\min} = -5$ zum Zeitpunkt $t_2 = 10$

Bestimmen Sie A, ω und φ und skizzieren Sie den Funktionsgraphen im Intervall $0 \leq t \leq 15$ (Schrittweite $\Delta t = 0.5$).

(b) Berechnen Sie die Menge aller Lösungen von (i) $\sin(2x) = \frac{3}{2}\cos x$ (ii) $2\sin x - \frac{3}{2} = 0$.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes (Definition 3.1.7), dass a der Grenzwert der Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
Bestimmen Sie dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass f"ur alle Folgeglieder a_n mit $n \geq n_0$ stets gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Verwenden Sie zu Beginn $\varepsilon = 10^{-5}$ und versuchen Sie es anschließend auch für allgemeines $\varepsilon > 0$.

(a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $a = 1$ (b) $a_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$, $a = \frac{2}{3}$

Aufgabe 8:

Gegeben sind die nachstehenden Zahlenfolgen $n \mapsto a_n$, wobei $n \in \mathbb{N}^\times$, durch Angabe einer expliziten Bildungsvorschrift der Form

(i) $n \mapsto a_n = (-1)^n \frac{2}{n+3}$ (ii) $n \mapsto a_n = \frac{2}{3^n}$ (iii) $n \mapsto a_n = \frac{4n^2-5n}{8n^2-6n+1}$

(iv) $n \mapsto a_n = \frac{\cos(n^2)}{8n^2-6n+1}$ (v) $n \mapsto a_n = \sqrt{\frac{3n^3+n}{2n+1}}$

(a) Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

(b) Berechnen Sie, falls vorhanden, den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

[1]bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems.

Aufgabe 9:

Gegeben sind die nachstehenden Funktionen $f_i : x \mapsto y = f_i(x)$, wobei $x \in D_i$ mit größtmöglichen Definitionsbereich D_i, der Form

(i) $f_1(x) = \frac{2x+1}{3+2x}$ (ii) $f_2(x) = \frac{x^3-1}{4x-4}$ (iii) $f_3(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \operatorname{sgn}(1-x)$.

(a) Bestimmen Sie Zahlen $x_0 \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Funktionen jeweils keinen Funktionswert besitzen, also nicht definiert sind.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an diese Stellen, d. h.

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) \ \text{ für } \ x \in D_i.$$

Hinweis: Wenden Sie formal die Rechenregeln zur Berechnung von Grenzwerten für Verknüpfungen von Funktionen an.

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie jeweils den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Übergangsstelle stetig ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{falls } x < 2 \\ -x + a & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x^a - 1 & \text{falls } x < 4 \\ 2^{\sqrt{x}} - \frac{x}{4} & \text{falls } x \geq 4 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1, & \text{falls } x < 2 \\ x^3 + ax - 4, & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - a^2x + 3 & \text{falls } x < -1 \\ 5ax - 1 & \text{falls } x \geq -1 \end{cases}$

Aufgabe 11:

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$, $g(0) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und f und g seien stetig an der Stelle $x = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$ gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass f und g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 12:

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit einem bezüglich 0 symmetrischen Definitionsbereich $D = (-a; a)$ $(a > 0)$.

(a) Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung an die Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$, so dass der Funktionsgraph die y-Achse als Spiegelachse besitzt (bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung ist).[1]

[1] Eine reelle Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit $D = (-a; a)$ $(a > 0)$, deren Funktionsgraph die y-Achse als Spiegelachse besitzt, heißt gerade; f mit zum Ursprung punktsymmetrischem Funktionsgraph heißt ungerade.

(b) Untersuchen Sie die nachfolgenden reellen Funktionen $g_i : x \mapsto g_i(x),\ i \in \{1;2;3\}$ mit $x \in D_i \subset \mathbb{R}$ auf deren Symmetrieverhalten (gemäß Aufgabenteil (a)).

$$y = g_1(x) = \sin x \cdot \cos x, \quad y = g_2(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}, \quad y = g_3(x) = \cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Aufgabe 13:

Gegeben sind die nachstehenden Zahlenfolgen $n \mapsto a_n$, wobei $n \in \mathbb{N}^\times$, durch Angabe ihrer Glieder in der Form

(i) $-4;\ -1;\ 2;\ 5;\ \dots$ (ii) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \dots$ (iii) $\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4};\ \frac{5}{6};\ -\frac{7}{8};\ \dots$ (iv) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \dots$

(a) Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift der dargestellten Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ an.

(b) Diskutieren Sie für jedes $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Eigenschaften Monotonie, Konvergenz und Beschränktheit. Führen Sie den Nachweis der Eigenschaften anhand der analytischen Darstellung.

Aufgabe 14:

Überprüfen Sie die folgenden stückweise definierten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{falls } x < 1 \\ -4x^2+8 & \text{falls } 1 \le x < 3 \\ -6x-8 & \text{falls } x \ge 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1/x & \text{falls } x < \mathrm{e} \\ \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\ln(x)} & \text{falls } \mathrm{e} \le x < 100 \\ \mathrm{e}^{x-101} + \frac{50}{x\ln(10)} & \text{falls } x \ge 100 \end{cases}$

Aufgabe 15:

Die nachstehenden reellen Funktionen beschreiben harmonische Schwingungen.

(a) $t \mapsto y(t) = 2 \cdot \sin(2t-4),\ t \in \mathbb{R}$ (b) $t \mapsto y(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right),\ t \in \mathbb{R}$

Skizzieren Sie jeweils den Funktionsgraphen. Untersuchen Sie die Funktionen innerhalb einer Periode auf Monotonie und Beschränktheit.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 16:

Welche Flächen im $\mathbb{R}^3$ werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben?

(a) $z = x - y$ (b) $x^2 + y^2 = 9,\ z \in \mathbb{R}$ (c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Aufgabe 17:

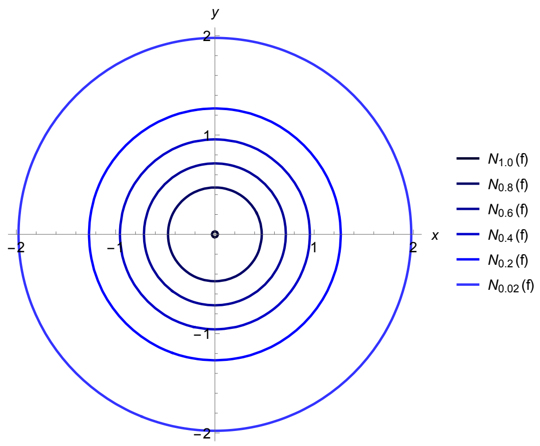
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \to \mathbb{R}$. F"ur $c \in \mathbb{R}$ hei"st $N_c(f) := \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$ die *Niveaumenge (Höhenlinie)* von f zum Niveau (zur Höhe) c.
Durch Zeichnen des Definitionsbereiches D_f und mehrerer Niveaumengen N_c für verschiedene Niveaus c im x, y-Koordinatensystem kann man sich oftmals eine dreidimensionale Vorstellung des Graphen von f verschaffen.

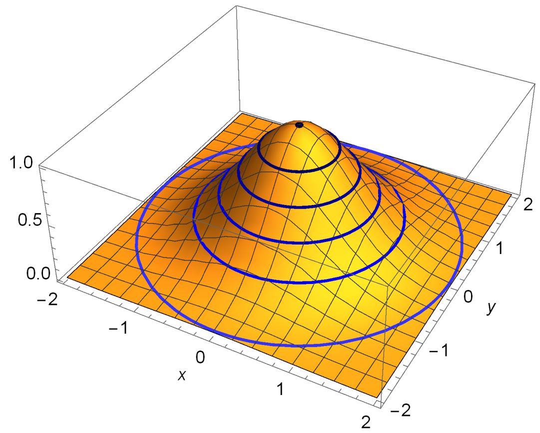
Beispiel: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Bestimmen $N_c(f)$:

$c = e^{-(x^2+y^2)} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = -\ln(c) \;\to\; N_c(f)$ ist ein Kreis um $M(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{-\ln(c)}$ und

existiert nur für $c \in (0, 1]$





Das Bild $f(D_f)$ (d.h. der kleinstmögliche Wertebereich von f) besteht aus allen $c \in \mathbb{R}$ mit $N_c(f) \neq \emptyset$.

Zeichnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \supseteq D_i \to \mathbb{R}$ mit dem größtmöglichen Definitionsbereich D_i jeweils ein Niveaulinienbild für fünf geeignete Niveaus c und machen Sie Aussagen dazu, wie der Graph von f_i aussieht. Geben Sie ferner jeweils das Bild $f_i(D_i)$ an.

$f_1(x, y) = 4 - x - 2y$ $\qquad$ $f_2(x, y) = x^2 - 2y$

$f_3(x, y) = xy$ $\qquad$ $f_4(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Aufgabe 18:

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2x - 2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = (x + 1)^2.$$

(a) Wie lautet die Abbildung $f \circ g$?

(b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}([0, 4])$ und das Bild $g([-2, 0])$.

Aufgabe 19:

Die eindeutige Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ wird Logarithmus von a zur Basis b, kurz $x = \log_b a$ genannt.[2]

[2] Wiederholen Sie die Regeln für das Rechnen mit Logarithmen sowie die Logarithmengesetze (siehe L. Papula, Mathe-

(a) Berechnen Sie die Nullstellen der reellen Funktionen $f_i : x \mapsto y = f_i(x)$, $x \in D_i \subset \mathbb{R}$ mit $i \in \{1; 2; 3\}$.

(i) $y = f_1(x) = e^{-x^2} - \frac{1}{2}$ (ii) $y = f_2(x) = 3\ln(2x) - 2$ (iii) $y = f_3(x) = (x+1)e^{-2x}$

($\ln a := \log_e a \ldots$ natürlicher Logarithmus, $e \approx 2.71828182845\ldots$ Eulersche Zahl)

(b) Geben Sie für die reellen Funktionen $h_i : x \mapsto y = h_i(x)$, $i \in \{1; 2; 3\}$ die größtmöglichen Definitionsbereiche D_i und die Wertebereiche an. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen.

(i) $y = h_1(x) = \ln(|x|)$ (ii) $y = h_2(x) = \ln(\cos x + 0.5)$
(iii) $y = h_3(x) = x \cdot e^{-2x}$

Diskutieren Sie Eigenschaften wie Monotonie, Periodizität und Beschränktheit der Funktionen.

Aufgabe 20:

Untersuchen Sie die Zahlenfolgen (a_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{5n^2-10n}{8n^3-5n+3}$ (b) $a_n = \frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{\sqrt{4n^3+n}}{-5n+1}$ (d) $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n}}{\sqrt[3]{27n^3-9n^2}}$

(e) $a_n = \frac{7^n+(-7)^n}{5^n}$ (f) $a_n = \frac{2^n}{3^n-5}$ *bei (a) – (f) sinnvoll ausklammern*

(g) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}$ (h) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+5}$ *bei (g),(h) R"uckf"uhrung auf den bekannten GW* $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

(i) $a_n = \frac{\sin n}{2+\sqrt[3]{n^5}}$ (j) $a_n = \frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$

(k) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (l) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ *bei (i) – (l) Sandwich-Satz anwenden*

(m) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ (n) $a_n = \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1}$ *bei (m),(n) mit 3. binom. Formel erweitern*

Aufgabe 21:

Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(4x-4)^2}$ (ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x^3-x+1}{4x-4}$ (iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+7}{3+4x}$

Hinweis: Zerlegen Sie Zähler- und Nennerpolynome in Linearfaktoren und klammern Sie ggf. gleiche reelle Faktoren aus.

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie jeweils den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Übergangsstelle stetig ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} & \text{falls } x < 1 \\ ax + 2 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-\sin(2x)}{5-\cos(5x)} & \text{falls } x \leq 0 \\ a\frac{3x+\sin(10x)}{7x-\sin(2x)} + \frac{1}{5} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

matik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band I, S.292-294).

Aufgabe 23:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x|$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & x > 1. \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \backslash \{3\} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -2 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq -2. \end{cases}$

Aufgabe 24:

Gegeben ist die reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in der reellen Variablen $x \in D \subset \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2tx - \frac{4t}{3}, & x < 1 \\ \frac{1}{x+t}, & x \geq 1 \end{cases}$$

worin t einen reellen Parameter bezeichnet.

(a) Geben Sie in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$ den größtmöglichen Definitionsbereich von f an.

(b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f stetig ist.

Aufgabe 25:

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.