Kurzfassung: **Lineare Optimierung: Grafische Lösung** von Joachim Püschel im Rahmen des Seminars Schulmathematik im Sommersemester 2020 an der TU Dresden.

1 Lineare Optimierungsprobleme

> „Das mathematische Teilgebiet der linearen Optimierung behandelt Probleme, in denen eine von n Veränderlichen abhängige lineare Funktion, die Zielfunktion, unter Einhaltung linearer **Restriktionen**, den **Nebenbedingungen**, zu minimieren oder [zu] maximieren ist. Dies kann als die Suche einer im Sinne der Zielfunktion optimalen Entscheidung unter Vorgabe gewisser Bedingungen interpretiert werden.“ [UD10]

Definition 1.1 (Lineares Optimierungsproblem)**.** *Ein lineares Optimierungsproblem kann durch*

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & c^\top x \\ \textit{NB} \quad & Ax \gtreqless b \end{aligned}$$

*beschrieben werden. Es ist also eine Maximierung oder Minimierung der Zielfunktion möglich. Außerdem können die Nebenbedingungen als Gleichungen oder Ungleichungen auftreten und einige Variablen können nicht-vorzeichenbeschränkt (**frei**) sein.*

Dabei ist $z = c^\top x$ die lineare **Zielfunktion**. Die Matrix A ist Element von $\mathbb{R}^{m \times n}$ und hat vollen Zeilenrang, die Vektoren c und b müssen passende Dimensionen haben: $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Der Vektor x enthält die **Entscheidungsvariablen** $x_i, i = 1 \ldots n$. Das Ungleichungssystem $Ax = b$ enthält zeilenweise die Nebenbedingungen.

1.1 Arten von Lösungen

Definition 1.2 (Zulässige und optimale Lösung [UD10])**.** *Eine Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ ist **zulässig**, wenn sie alle Restriktionen erfüllt. Falls ein lineares Optimierungsproblem keine zulässige Lösung besitzt, heißt das Problem unzulässig.*

*Eine zulässige Lösung x heißt **optimal**, wenn sie, je nach Problem, den maximalen oder minimalen Wert der Zielfunktion liefert. Der Wert $z(x)$ heißt dann **Optimalwert**. Falls ein lineares Optimierungsproblem zulässige Lösungen, aber keine optimale Lösung enthält, heißt es **unbeschränkt**.*

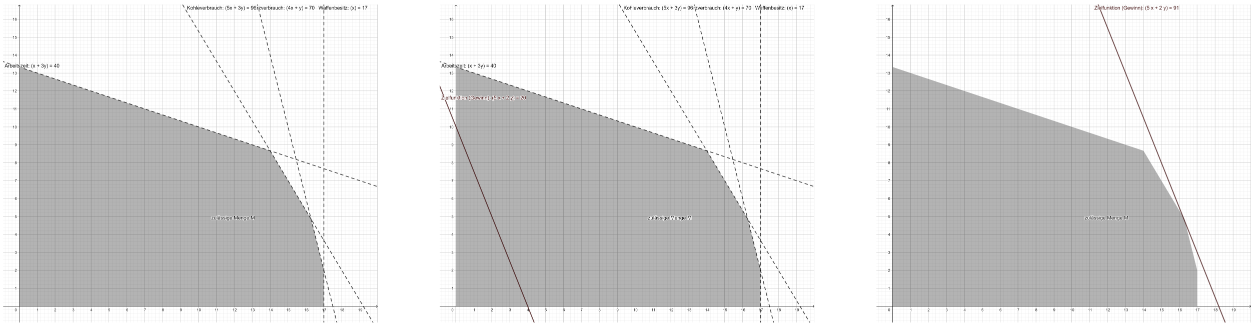
1.2 Lösung linearer Optimierungsprobleme mit zwei Entscheidungsvariablen

Lineare Optimierungsprobleme mit genau zwei Entscheidungsvariablen können mithilfe des Algorithmus 1.3 [UD10] gelöst werden, falls sie lösbar sind. Die Entscheidungsvariablen x_1 und x_2 können als Achsen eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems aufgefasst werden. Die Zielfunktion hängt auch nur von diesen beiden Variablen ab und ist als Niveaulinie einzeichenbar. Da die Restriktionen auch nur diese beiden Entscheidungsvariablen beinhalten, können auch diese in das Koordinatensystem eingezeichnet werden: Die Hyperebenen, welche durch die Nebenbedingungen definiert werden, sind in diesem Fall Geraden (siehe Abbildung 1).

Algorithmus 1.3 (Grafische Lösung linearer Optimierungsaufgaben mit zwei Variablen)**.**

1. *Grafische Darstellung des zulässigen Bereichs M. Wenn M leer ist, stopp. Die Aufgabe ist nicht lösbar, der zulässige Bereich ist leer.*

2. *Grafische Darstellung einer Niveaulinie der Zielfunktion.*



(a) Bestimmung der zulässigen Menge als Durchschnitt aller Halbräume

(b) Einzeichnen der Zielfunktion z auf Niveau $z = 20$

(c) Parallelverschiebung von z zu größeren Niveaus so weit wie möglich, hier au Niveau $z = 91$.

Abbildung 1: Grafische Lösung des linearen Optimierungsproblems durch Verschiebung des Niveaus der Zielfunktion

3. *Veränderung des Zielfunktionsniveaus in Optimierungsrichtung so weit wie möglich, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen. Wenn die Zielfunktion unbeschränkt verschoben werden kann, stopp. Die Aufgabe ist nicht lösbar, da die Zielfunktion über dem zulässigen Bereich in Optimierungsrichtung unbeschränkt ist.*

4. *Identifizierung der optimalen Lösung(en) als Schnittpunkt(e) von (jeweils) zwei Geraden, als die Punkte auf der Strecke zwischen diesen Schnittpunkten, beziehungsweise als alle Punkte auf einer unbeschränkten Kante des zulässigen Bereiches beginnend in einem Schnittpunkt.*

5. *Lösen des entsprechenden Gleichungssystems.*

6. *Berechnung des zugehörigen Zielfunktionswertes.*

Der Algorithmus stoppt unter gewissen Bedingungen, ohne eine Lösung geliefert zu haben (1, 3). Es gibt entweder eine oder unendlich viele Lösungen (4).

2 Ausblick: Anwendungen der Linearen Optimierung

Lineare Optimierung kann unter anderem zur Lösung folgender Problemklassen eingesetzt werden [KM18, UD10]: Mischungsprobleme (Heizölaufgabe aus [Her20], möglichst billige Kaffeemischung mit vorgegebenem Koffein- und Säuregehalt), Investitionsplanung, Transportoptimierung (Dispatcher bei einer Spedition: „Wie viele Wagen werden an welchen Ort entsandt, die Fahrtzeiten sollen minimal sein.“), Zuordnungsprobleme („Wie viele Arbeiter sollen an einem Produkt arbeiten, damit der Gewinn maximal wird?“).

Literatur

[Her20] Markus Herrich. Skript: Elementare Numerik. 2020.

[KM18] Andreas Koop and Hardy Moock. *Lineare Optimierung – eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2018. online über SLUB.

[UD10] Thomas Unger and Stephan Dempe. *Lineare Optimierung. Modell, Lösung, Anwendung.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. online über SLUB.