10 Duales LP, Lagrange-Multiplikatoren, Schattenpreise

Optimierung für Nichtmathematiker

WS 2020/21

Quizfrage

Das duale LP wird i.d.R. nicht in Normalform angegeben.

Wie lautet das duale LP zu

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter} \quad & A x = b \quad \text{sowie} \quad x \geqslant 0 \quad ? \end{aligned}$$

Die Variablen sind jeweils $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1 A
$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & b^\top y \\ \text{unter} \quad & A^\top y + z = c \\ \text{und} \quad & z \geqslant 0 \end{aligned}$$

8 B
$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & b^\top y \\ \text{unter} \quad & A^\top y + z = c \\ \text{und} \quad & z \geqslant 0 \end{aligned}$$

6 C
$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & b^\top y \\ \text{unter} \quad & A^\top y + z = c \\ \text{und} \quad & y \geqslant 0, \ z \geqslant 0 \end{aligned}$$

2 D
$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & b^\top y \\ \text{unter} \quad & A^\top y + z = c \\ \text{und} \quad & y \geqslant 0, \ z \geqslant 0 \end{aligned}$$

Quizfrage

Welcher Zusammenhang besteht zwischen zulässigen Punkten x für die primale Aufgabe und zulässigen Punkten (y, z) für die duale Aufgabe?

→ Umfrage

13 A $b^\top y \leqslant c^\top x$

2 C $b^\top y \geqslant c^\top x$

2 B Jedes primal zulässige x ist auch dual zulässig.

0 D kein Zusammenhang

Schwache Dualität

primale Zulässigkeit

$$Ax = b \quad ✓$$
$$x \geqslant 0 \quad ✓$$

duale Zulässigkeit

$$A^\top y + z = c \quad ✓$$
$$z \geqslant 0 \quad ✓$$

Dann gilt $b^T y \le c^T x$, denn:

$$\boxed{c^\top x - b^\top y}$$

$= c^T x - x^T A^T y$

$= x^T (c - A^T y)$

$= \boxed{x^T z} = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\geq 0} \underbrace{z_i}_{\geq 0}$

≥ 0

$Ax = b \implies b^T = x^T A^T$

$A^T y + z = c$

Quizfrage

Wann sind primal/dual zulässige Punkte x bzw. (y, z) optimal für ihre jeweilige Aufgabe?

→ Umfrage $b^T y \le c^T x$

Das gilt in allen zulässigen Punkten.

8 **A** wenn $c^\mathsf{T} x = b^\mathsf{T} y$ gilt

3 **B** wenn $x^\mathsf{T} z \geqslant 0$ gilt

6 **C** wenn $\boxed{x^\mathsf{T} z = 0}$ gilt

1 **D** wenn dort die Ableitung der Zielfunktion gleich null ist

$A \Leftrightarrow C$

$f(x) = c^T x \quad \Rightarrow \nabla f(x) \equiv c \neq 0$

„Ableitung $= 0$" gilt nur für unrestringierte Aufgaben!

Starke Dualität

primales LP

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x \\ \text{unter} \quad & Ax = b \\ \text{sowie} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

duales LP

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & b^\top y \\ \text{unter} \quad & A^\top y + z = c \\ \text{und} \quad & z \geqslant 0 \end{aligned}$$

Dann gilt:

(ohne Beweis)

- primales LP lösbar $\Leftrightarrow$ duales LP lösbar
- Lösungen erkennt man an $\underbrace{x^\top z = 0}_{\text{Komplementarität}}$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \underbrace{z_i}_{\geqslant 0} = 0 \iff \boxed{x_i z_i = 0} \quad i = 1, \ldots, n$$

Quizfrage

Führt das (primale) Simplex-Verfahren die dualen Variablen mit?

→ Umfrage

0 A nein, nur das duale Simplex-Verfahren benutzt die dualen Variablen

4 C ja, aber wie die dualen Variablen vorkommen, ist nicht bekannt

9 B ja, und zwar gilt $y = A_B^{-\top} c_B$, $z_B = 0$ und $z_N = \Delta_N$

3 D ja, aber erst am Ende kann man die dualen Variablen ablesen

Duale Größen im Simplex-Verfahren

primale Ecke x bestimmt durch $\mathcal{B}, \mathcal{N}$-Indizes

$x_\mathcal{N} = 0, \quad A_\mathcal{B} x_\mathcal{B} = b$ primale Zulässigkeit ✓

$$\Delta_N = c_N - A_N^T \underbrace{(A_\mathcal{B}^{-T} c_\mathcal{B})}_{=:y} =: z_\mathcal{N} \qquad z_\mathcal{B} := 0$$

- duale Zulässigkeit?

$A_\mathcal{B}^T y + \underbrace{z_\mathcal{B}}_{=0} = c_\mathcal{B}$ ✓

$A_N^T y + z_\mathcal{N} = c_N$ ✓

$\Big\}$ $A^T y + z = c$ ✓

$z_\mathcal{B} = 0 \geq 0$ ✓ $\quad \boxed{\text{aber}}$ $z_\mathcal{N} = \Delta_N \geq 0$ gilt erst in der Lösung!

- Komplementarität

$$x^T z = x_\mathcal{B}^T \underbrace{z_\mathcal{B}}_{=0} + \underbrace{x_\mathcal{N}^T}_{=0} z_N = 0 \quad ✓$$

Quizfrage

Was ist der Unterschied zwischen dem primalen und dem dualen Simplex-Verfahren?

Das primale (duale) Verfahren iteriert auf den Ecken des primalen (dualen) Polyeders.

→ Umfrage

Beide Varianten lösen immer beide LPs!

3 ~~A~~ Das duale Simplex-Verfahren löst das duale LP.

1 ~~C~~ Das primale Simplex-Verfahren löst das primale LP.

15 B Die Iterierten des primalen Verfahrens sind primal zulässig, die des dualen Verfahrens sind dual zulässig.

1 ~~D~~ Es gibt keinen Unterschied.

Beim dualen Simplex ist $x_B \geq 0$ erst in der Lösung erfüllt.

Quizfrage

KKT-Bedingungen (11.5) für LPs (in allgemeiner Form)

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den dualen Variablen (y, z) und den Lagrange-Multiplikatoren λ_{eq} und λ_ℓ?

duale Variablen = Lagrange-Multipl. (bis auf Vorzeichen)

$\rightarrow$ Umfrage

0 A kein Zusammenhang

13 B $y = -\lambda_{\text{eq}}$, $z = \lambda_\ell$

4 C $y = z$, $\lambda_{\text{eq}} = \lambda_\ell$

Dimensionen passen nicht $m \neq n$

3 D $y = \lambda_{\text{eq}}$, $z = -\lambda_\ell$

$z \geq 0$, $\lambda_\ell \geq 0$ ↯

KKT-Bedingungen nachrechnen

KKT-Bedingungen (11.5) für Aufgabe in Normalform:

$A^T \lambda_{eq} - \lambda_e + c = 0 \iff A^T y + z = c$ } duale Zulässigk.

$\lambda_e \geq 0 \iff z \geq 0$

$\ell - x \leq 0 \iff x \geq 0$ primale Zul.

$\lambda_e^T(\ell - x) = 0 \iff z^T x = 0$ Kompl.

$Ax - b = 0 \iff Ax = b$ primale Zul.

$y = -\lambda_{eq}$

$z = \lambda_e$

$\ell = 0 \to$ Normalform $x \geq 0$

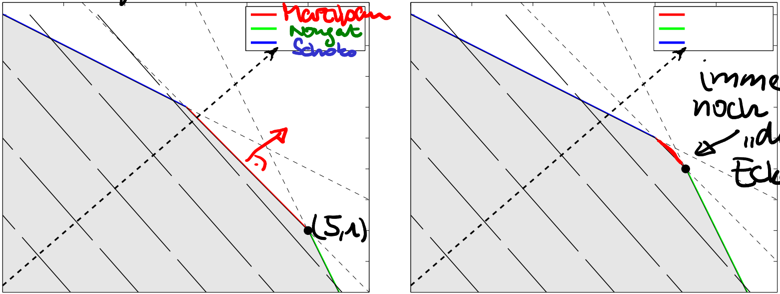
als Schattenpreise

Bedeutung der Multiplikatoren

Mozartproblem

−56.5

−53
Opt.
Wert
Ziel-
funkt.



$Ax \le b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \hookrightarrow \lambda_{\text{ineq}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$

Die Interpretation von λ_{ineq} als Schattenpreis sagt voraus, dass wir damit

$$-\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.5$$

in der Zielfunktion gewinnen.

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

→ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2