

08 Einführung in die lineare Optimierung

Optimierung für Nichtmathematiker
WS 2020/21

Prüfung

deutsch oder englisch

- ▶ Die Prüfungen werden mündlich per BBB-Videokonferenz stattfinden.
- ▶ Prüfungszeitraum 19.01.2021 bis einschließlich 23.03.2021
- ▶ Prüfungsinhalte: Skript, Konsultation, Übungen zu Kapitel 1–3
- ▶ siehe auch Ordner „Prüfung“ im OPAL

*Termine über Sekretariat
(Fran Glauzberg)*

Quizfrage

„alles muss linear sein“

Wann spricht man von einer linearen Optimierungsaufgabe?

→ Umfrage

~~10~~ A wenn die Zielfunktion linear ist

10 C wenn die Zielfunktion und die Nebenbedingungen linear sind

~~2~~ B wenn die Nebenbedingungen linear sind

~~0~~ D wenn die Lösung linear ist

Quizfrage

lineare Zielfunktion:
 $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_0$

Welche dieser Aufgaben ist **keine** lineare Optimierungsaufgabe?
(Die Optimierungsvariable ist jeweils $x \in \mathbb{R}^2$.)

→ Umfrage

3 A Minimiere $x_1 + x_2$ ✓
unter $x_1 \geq 0$ ✓
und $x_2 \geq 0$ ✓

3 B Minimiere $x_1 + x_2$ ✓
unter $x_1 = 0$ ✓
und $x_2 = 0$ ✓

12 C Minimiere $x_1 \cdot x_2$
unter $x_1 \geq 0$
und $x_2 \geq 0$

4 D Minimiere $x_1 + x_2$ ✓
keine NB
(unbeschränkt)

Allgemeine Form von LPs für linprog $x \in \mathbb{R}^n$

Maximiere $C^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$
 \uparrow Kostenvektor (legt auch n fest)

unter $\underline{\underline{A_{eq}}} x = \underline{\underline{b_{eq}}}$

und $\underline{\underline{A_{ineq}}} x \leq \underline{\underline{b_{ineq}}}$
 \uparrow komponentenweise

und $\underline{\underline{l}} \leq x \leq \underline{\underline{u}}$
 \uparrow lower bound \uparrow upper bound

7 Daten: 2 Matrizen, 5 Vektoren (wtl. [7])
Wir müssen keine Funktionen programmieren!

Quizfrage

Wie formulieren wir die Aufgabe $x \in \mathbb{R}^3$

Minimiere $2x_1 - x_3$

unter $x_1 + x_2 \geq 1$ und $4x_1 - x_3 \leq 2$

mit Vektoren und Matrizen? $(\Rightarrow) -x_1 - x_2 + 0x_3 \leq -1$

1 A $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} b_{\text{ineq}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

7 C $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} b_{\text{ineq}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

12 B $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} b_{\text{ineq}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1 D $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} b_{\text{ineq}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

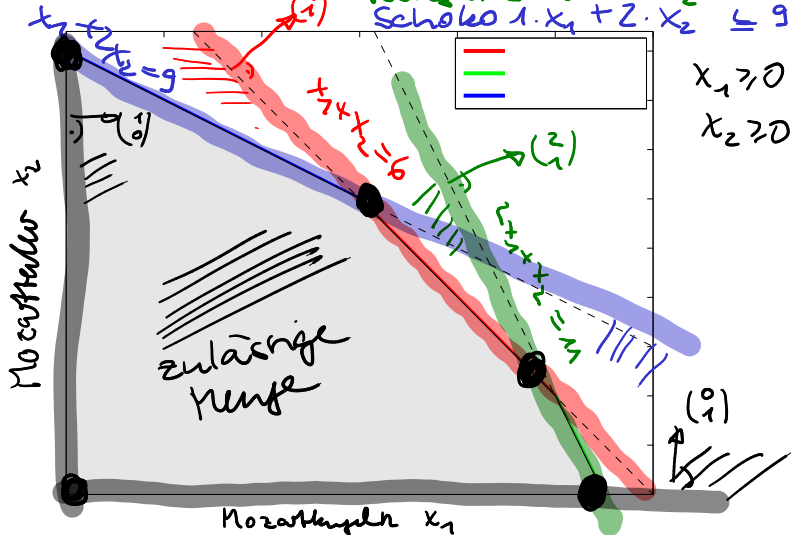
zulässige Menge Mozartproblem

XER²

Martina $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 6$

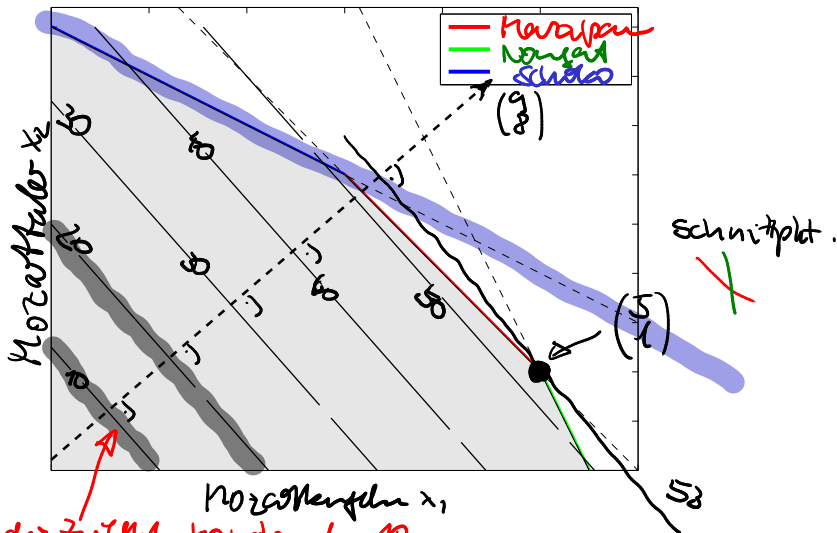
Nargad $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 11$

Schoko $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 9$



Maximiere $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Max. } -\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}^T x$

Mozartproblem: grafische Lösung



Matlab-Demonstration

Mozartproblem.m

KKT-Bedingungen

λ = Lagrange-Multiplikatoren

~~λ_{ineq} , λ_{eq} , λ_ℓ , λ_u~~
jeweils zu einer Sorte
Nebenbed.-gehörend

$$A_{ineq}^T \lambda_{ineq} + \cancel{A_{eq}^T \lambda_{eq}} - \lambda_\ell + \cancel{\lambda_u} + c = 0$$

$$\lambda_{ineq} \geq 0, \quad A_{ineq} x^* - b_{ineq} \leq 0, \quad \lambda_{ineq}^T (A_{ineq} x^* - b_{ineq}) = 0$$

$$\lambda_\ell \geq 0, \quad \ell - x^* \leq 0, \quad \lambda_\ell^T (\ell - x^*) = 0$$

~~$$\lambda_u \geq 0, \quad x^* - u \leq 0, \quad \lambda_u^T (x^* - u) = 0$$~~

~~$$A_{eq} x^* - b_{eq} = 0$$~~

(Optimalitätsbedingungen)

KKT-Bedingungen Mozartproblem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $A_{\text{ineq}}^T \lambda_{\text{ineq}} - \lambda_\ell + c = 0 \quad \checkmark$

- $\lambda_{\text{ineq}} \geq 0, \quad A_{\text{ineq}} x^* - b_{\text{ineq}} \leq 0,$

$$\lambda_{\text{ineq}}^T (A_{\text{ineq}} x^* - b_{\text{ineq}}) = 0 \quad \checkmark$$

- $\lambda_\ell \geq 0, \quad \ell - x^* \leq 0,$

$$\lambda_\ell (\ell - x^*) = 0 \quad \checkmark$$

λ_{ineq}

$A_{\text{ineq}} x^* - b_{\text{ineq}}$

$0 \leq 7$

$6 - 6 = 0$

$0 \leq 1$

$11 - 11 = 0$

$0 = 0$

$7 - 9 = -2$

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

→ Benutzen Sie den **Chat**.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2