07 Parameteridentifikation: Ableitungen, Ergänzungen zu KQ-Aufgaben

Optimierung für Nichtmathematiker
WS 2020/21

Quizfrage

Das Levenberg-Marquardt-Verfahren benötigt die Ableitung (Jacobimatrix) der Residuenfunktion $r(x)$. Wie beschafft sich das Verfahren diese Information?

→ Umfrage

0 A Jacobimatrix wird nicht benötigt

1 B Benutzer muss Jacobimatrix bereitstellen

13 C Jacobimatrix wird intern durch Finite-Differenzen-Approximation bestimmt

2 D Jacobimatrix wird intern durch exakte Ableitung bestimmt

neuerdings seit Matlab R2020b:
algorithmisches Differenzieren
in der Optimierungs-Toolbox

Finite-Differenzen-Approximation der Jacobimatrix

$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Parameter

Messwerte

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial r_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

in $\mathbb{R}^m$

$$\frac{r(x + h e_1) - r(x)}{h}$$

FD-Approximation arbeitet spaltenweise

Quizfrage

In welcher Beziehung steht die Jacobimatrix der Residuenfunktion $r(x)$ (`lsqnonlin`) zur Jacobimatrix der Modellfunktion $g(x;\xi)$ (`lsqcurvefit`)?

→ Umfrage

1 A haben miteinander nichts zu tun

3 B sind Transponierte voneinander

5 C unterscheiden sich um eine konstante Matrix

4 D sind identisch

Jacobimatrix von Modell- und Residuenfunktion

$$r_i(x) = \underbrace{g(x; \xi_i)}_{\text{Modellvorhersage}} - \underbrace{\eta_i}_{\text{Messwert}}$$

Eintrag (i,j) in Jacobimatrix:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} r_i(x)}_{\text{Jacobimatrix von } r(x)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} g(x; \xi_i)}_{\text{Jacobimatrix von } g(x; \xi)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_j} \eta_i}$$

Matlab-Demonstration

`Preisabsatzfunktion.m`

`Preisabsatzfunktion_mit_Ableitung.m`

Quizfrage

Warum formuliert man Aufgaben der Parameteridentifikation meistens als KQ-Aufgabe?

→ Umfrage $\sum_{i=1}^{m} |r_i(x)|$

4 A Im Vergleich zu $f(x) = \|r(x)\|_1$ ist $f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2$ differenzierbar.

robuste Statistik

11 B Die Lösung ergibt dann den wahrscheinlichsten Parameterwert.

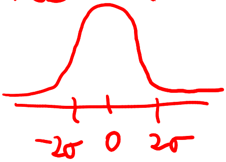
2 C KQ-Aufgaben sind einfach.

3 D KQ-Aufgaben sind immer konvex.

nur lineare KQ-Aufgaben sind garantiert konvex

Motivation KQ-Aufgaben

Dichte einer Normalvert.



ideal: $\eta = g(x;\xi)$

real: $\eta = g(x;\xi) + \underbrace{\mathcal{N}(\overset{\text{Mittelwert}}{0}, \overset{\text{Varianz}}{\sigma^2})}_{\text{normalverteilter Messfehler}}$

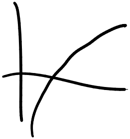
Dichte der Normalverteilung

$$\varphi(\eta) = c \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(g(x;\xi)-\eta\right)^2\right)$$

Maximiere $\varphi(\underset{\text{gegeben}}{\eta})$ bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ Maximiere $\ln \varphi(\eta)$ bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\ln \varphi(\eta) = \underbrace{\ln c}_{\text{Konst}} - \frac{1}{2\sigma^2}\left(g(x;\xi)-\eta\right)^2$$



$\Leftrightarrow$ Minimiere $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i^2}\left(g(x;\xi_i)-\eta_i\right)^2$

Quizfrage

Wann finden gewichtete KQ-Aufgaben Verwendung?

→ Umfrage

A wenn verschiedene Residuenkomponenten unterschiedlich gewichte~~n~~t werden sollen

B wenn verschiedene Messwerte unterschiedliche Genauigkeit haben

C gehen in Matlab nicht

D wenn ansonsten der optimale Zielfunktionswert zu groß ist

Fehlerquellen bei der Parameterid.

keine perfekte Übereinstimmung zwischen Modell und Messwert

- unpassende Modellfunktion (nicht perfekte)
- lokales Minimum
- Genauigkeit der Lösung (Toleranz)
- Messfehler
- Rundungsfehler

Einfluss des Messfehlers

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial r_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Wie empfindlich reagieren die Residuen auf Änderungen in den Parametern x?

Was ist günstig?

Günstig ist, wenn die Einträge groß sind!

Kleine Änderungen in x machen große Änderungen in $r(x)$ und damit in der Zielfunktion $\frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2$.

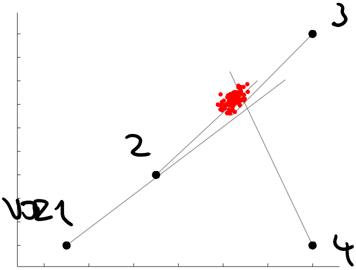
$\nabla f(x) \approx 0$

gut:  schlecht: 

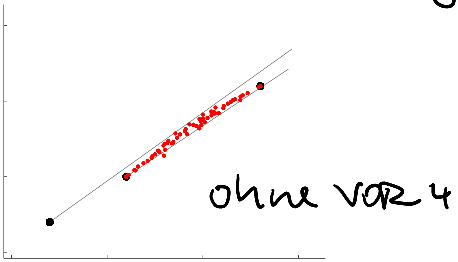
möchte: große Singulärwerte von $J(x)$!

Einfluss des Messfehlers

Position eines Flugzeugs durch Peilungsmessung



geeignetes „Experiment“



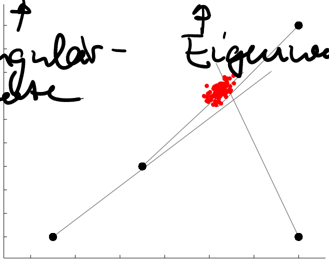
ungeeignetes „Experiment“

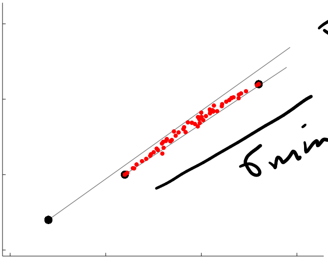
→ Optimale Versuchsplanung

Einfluss des Messfehlers

$\sigma(J) = (\lambda(J^T J))^{1/2}$ SVD

Singulär-werte   Eigenwerte





σ_{max} σ_{min}

geeignetes „Experiment“

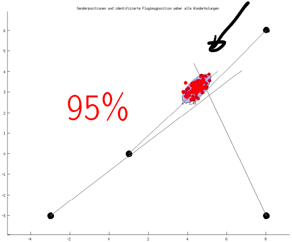
$$\sigma_{\min}(J_0) = 7.90$$
$$\sigma_{\max}(J_0) = 18.60$$
$$\mathrm{cond}(J_0) = 2.35$$

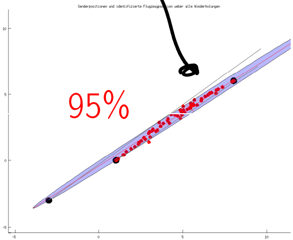
ungeeignetes „Experiment“

$$\sigma_{\min}(J_0) = 0.61$$
$$\sigma_{\max}(J_0) = 20.59$$
$$\mathrm{cond}(J_0) = 33.68$$

Einfluss des Messfehlers

Konfidenzellipsen





geeignetes „Experiment“

$$\sigma_{\min}(J_0) = 7.90$$
$$\sigma_{\max}(J_0) = 18.60$$
$$\operatorname{cond}(J_0) = 2.35$$

ungeeignetes „Experiment“

$$\sigma_{\min}(J_0) = 0.61$$
$$\sigma_{\max}(J_0) = 20.59$$
$$\operatorname{cond}(J_0) = 33.68$$

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

$\rightarrow$ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Wie kann man mit Matlab gewichtete KQ-Aufgaben lösen, die "nicht explizit vorgesehen" sind?

lsqnonlin / lsqcurvefit bieten keine Möglichkeit, die Gewichte der Residuen einzustellen.

Abhilfe: Definiere gewichtete Residuen

$$\tilde{r}_i(x) := \frac{1}{\sigma_i} r_i(x) = \frac{g(x; \xi_i) - \eta_i}{\sigma_i}$$

am besten mit lsqnonlin

Fragen und Antworten 2